مدخل الى الرياضيات

لطلبة تكنولوجيا المعلومات والمكتبات والعلوم الهندسية

MATH 99

سنان وائل عواده



مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع

أعد هذا الكتاب

بالإعتماد على الخطط الجديدة لجامعة البلقاء التطبيقية

مدخل إلى الرياضيات

لطلبة تكنولوجيا المعلومات والمكتبات والعلوم الهندسية

Math99

مدخل إلى الرياضيات
لطلبة تكنولوجيا المعلومات والمكتبات
والعلوم الهندسية
Math99

الأستاذ

سنان وائل عوادة

ماجستير إحصاء وقياس

الطبعة الأولى

2012م -- 1433هـ

مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (2012/2/558)

510

عودة، سنان وائل

مدخل إلى الرياضيات لطلبة تكنولوجيا المعلومات والمكتبات والعلوم الهندسية/ سنان وائل عودة. عمان،- مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع، 2012

(   ) ص

ر.إ. : 2012/2/558

الواصفات: /الرياضيات/

- يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية أو أي جهة حكومية أخرى.

الطبعة العربية الأولى

2012م – 1433هـ

مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع

عمان – وسط البلد – ش. السلط – مجمع الفحيص التجاري

تلفاكس 4632739 ص.ب. 8244 عمان 11121 الأردن

عمان – ش. الملكة رانيا العبد الله – مقابل كلية الزراعة – مجمع زهدي حصوة التجاري

www: muj-arabi-pub.com

Email: Moj_pub@hotmail.com

ISBN 978-9957-83-152-3 (ردمك)

الإهداء

أهدي هذا العمل لكل من ساهم معي في إنجاحه من أفراد عائلتي وأصدقائي المخلصين.

الفهرس

first Unit

Second Unit

Third Unit

Fourth Unit

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيد الخلق والمرسلين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم النبي العربي الهاشمي الأمين.

أما بعد،

بعد الاتكال على الله تم وضع هذا الكتاب في المواضيع التي تهم كل الذين يرغبون في دخول عالم الرياضيات الواسع حيث تعتبر المواضيع المطروحة في هذا الكتاب الاساس وهذه المواضيع هي المثاليات والمتسلسلات اللوغارتمات والاقترانات المثلثية حسب ما ورد في خطة الرياضيات 99 في جامعة البلقاء ولما لهذه المواضيع من أهمية فقد تناولناها بشمولية وبتفصيل وبما يتناسب مع مستوى المادة وطرحنا الأمثلة لتتناسب مع جميع مستويات الطلبة.

واخيراً اتوجه من زملائي المدرسين واخواني الطلبة أن لا يبخلو علينا بملاحظاتهم حول هذه الطبعة لتلافيها في الطبعات اللاحقة

والله ولي التوفيق.

المؤلف

سنان وائل عواده

ماجستير إحصاء وقياس

The first Unit

Sequence and Series

The first Unit

Sequence and Series

1) Sequence.

2) Series.

3) Arithmetic Sequence .

4) Arithmetic and Series and Summation of Arithmetic.

5) Geometric Sequence

6) Finite Geometric Series.

7) Infinite Geometric Series

1- المتتالية (Sequenc)

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

لو طرح السؤال التالي ما هو العدد الذي ياتي بعد 21

الاجابة سوف تكون 34 وذلك بسبب

ان العدد التالي هو حاصل جمع العددين السابقين بمعنى ان

المتتالية عبارة عن ترتيب من الاعداد ويرمز لكل حد منها بالرمز (a) بمعنى ان الحد الاول للمتتالية هو (a_1) والثاني (a_2) وهكذا حتى نصل للحد العام ويرمز له بالرمز (a_n)

3 يمثل الحد الرابع عبارة عن حاصل جمع (2+1)

5 يمثل الحد الخامس عبارة عن حاصل جمع (2+3)

8 يمثل الحد السادس عبارة عن حاصل جمع (5+3)

13 يمثل الحد السابع عبارة عن حاصل جمع (8+5)

21 يمثل الحد الثامن عبارة عن حاصل جمع (8+13)

بالتالي فان الحد التاسع المطلوب ايجاده هو 34 ناتج عن جمع (21+13)

اذا كان بالمستطاع ايجاد الحد العام للمتتالية بدلالة (n) فيمكن ايجاد اي حد داخل هذه المتتالية بالاعتماد على حدها العام بشرط معرفة ترتيب ذلك الحد

مثال:

1 , 3 , 6 , 10 , 15 , ...

$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ where n=1,2,3,4,.......

ومن الجدير بالذكر انه يمكن التاكد من ذلك بالتعويض باي حد داخل المتتالية وذلك بتعويض بالمتسلسلة الاصلية كالتالي:

$$a_1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_2 = \frac{2(2+1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$a_3 = \frac{3(3+1)}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

وهكذا

مثال:

جد الحد العام والحد العاشر للمتتالية غير المنتهية (infinite)

a	1	4	9	16 , ...
	↓	↓	↓	↓
n	1	2	3	4

$a_n = n^2$

$a_{10} = 10^2 = 100$

مثال:

جد الحدود العشرة الاولى للمتتالية

$$a_n = \frac{n}{(n+1)}$$

$a_1 = \frac{1}{(1+1)} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $a_2 = \frac{2}{(1+2)} = \frac{2}{3}$

$a_3 = \frac{3}{(1+3)} = \frac{3}{4}$ $\qquad$ $a_4 = \frac{4}{(1+4)} = \frac{4}{5}$

$a_5 = \frac{5}{(1+5)} = \frac{5}{6}$ $\qquad$ $a_6 = \frac{6}{(6+1)} = \frac{6}{7}$

$a_7 = \frac{7}{(1+7)} = \frac{7}{8}$ $\qquad$ $a_8 = \frac{8}{(1+8)} = \frac{8}{9}$

$a_9 = \frac{9}{(1+9)} = \frac{9}{10}$ $\qquad$ $a_{10} = \frac{10}{(1+10)} = \frac{10}{11}$

مثال:

جد الحد العام للمتتاليات غير المنتهية (infinity)

1) $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots\ldots\ldots$

2) $-1, -4, -9, -16, -25, -36, \ldots\ldots\ldots$

3) $1, 8, 27, 64, 125, \ldots\ldots\ldots$

1) $a_n = -\frac{1}{n}$

رمــز المجمــوع ($\sum$): هــو رمــز اغريقي نستخدمه ليدل على ناتج جمع عدد مــن الاعــداد مثــال لــو اردنــا التعبير عــن مجموع الاعداد

2) $a_n = -n^2$

3) $a_n = n^3$

$$1 + 2 + 3 + \cdots ..100 = \sum_{r=1}^{100} r$$

2) المتسلسلات (Series)

4 , 6 , 8 , 10, 12

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

1 2 3 4 5

الحد العام

$a_n = 2n$

المتسلسلة هي كالاتي

2+4+6+8+10

تعريـف المتسلسـلة اذا كانـت $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ متتاليـة فـان $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ متسلسلة وتكتب على النحو التالي

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

وتسمى المتسلسة المرتبطة بهذه المتتالية وهذا يؤدي الى

اذا كانت المتالية منتيهة فان المتسلسلة المرتبطة بها منتهية

اذا كانت المتاليـة غـير منتيهـة فـان المتسلسـلة المرتبطـة بهـا غـير منتهية

مثال:

$$1, 8, 27, \dots\dots, 1000$$

$$a_1 = 1^3 \;,\; a_2 = 2^3 , \dots\dots\dots a_{10} = 10^3$$

$$a_n = n^3$$

وباعتبار ان الحد الاخير للمتالية هو $a_{10} = 10^3 = 1000$ وبما ان n تعبر عن رتبة الحد الاخير في هذه المتتالية فان $n=10$

$$1 + 8 + 27 + \dots + 1000 = \sum_{n=1}^{10} n^3$$

مثال:

استخدم رمز المجموع لتعبير عن التسلسلة المرتبطه بالمتتالية

$2, 5, 10, 17, \ldots = \quad a_n = n^2+1$

وعليه فان التسلسلة المرتبطة بها تعطى بالعلاقة التالية:

$2 + 5 + 10 + 17 + \ldots$

$a_n = \sum_{n=1}^{10}(n^2 + 1)$

مثال:

استخدم رمز المجموع لتعبير عن التسلسلة المرتبطه بالمتتالية

$2, 5, 10, 17, \ldots,$

$a_n = n^2+1$

مثال:

اكتب مفكوك التسلسلة المنتهية

$$\sum_{n=1}^{5}(3n-2)$$

$\sum_{n=1}^{5}(3n-2) = 1 + 4 + 7 + 10 + 13$

3) المتاليات الحسابية (Arithmetic Sequence)

20, 25, 30, 35, 40

نلاحظ ان الفرق ثابت بين الحدود السابقة بمعنى

25-20 =5

30-25=5

35-30=5

40-30=5

ان مثل هذه المتتاليات تسمى بالمتتاليات الحسابية وذلك يرجع لان الفرق بين كل حد والحد السابق له مقدار ثابت وهذا الفرق يسمى ب اساس المتتالية (d) والحد الاول بالرمز (a)

الحد الاول

$$a_1 = a = 20$$

الحد الثاني

$$a_2 = 25 = a + 5 = 25$$

or

$$a_2 = a + d(2-1) = a + d = 25$$

الحد الثالث

$$a_3 = 30 = a + (3-1)d = a + 2d$$

الحد الخامس

$$A_5 = 40 = a + (5-1)d = a + (n-1)d$$

المتتالية الحسابية عبارة عن مجموع متتالية يكون الفرق بين كل حد فيها والحد السابق له مباشرة يساوي مقدارا ثابتا يسمى هذا الفرق باساس المتتالية الحسابية ويرمز له بالرمز d ويرمز للحد الاول فيها بالرمز a

مثال:

بين ان المتتالية

$$4,7,10,\ldots\ldots$$

هي متتالية حسابية ثم جد حدها العام

بما ان الفرق بين اي حدين متتالين هو مقدار ثابت (3) فاننا نعتبرها متتالية حسابية وللتاكد من ذلك بدرس الفرق بين كل حدين متالين

$7-4=3$

$10-7=3$

$a=4$

$a_n = a + (n-1)d = 4+(n-1)3 = 3n+1$

مثال

جد الحد العام لمتسلسلة حسابية اساسها 3 وحدها الاول 1

الحد الاول (a) هو 1

الاساس (d) هو 3

بالتالي

$$a_n = a + (n-1)d = 1+(n-1)3 = 3n-2$$

مثال

جد الحد العام لمتسلسلة حسابية اساسها 4 وحدها الاول5

الحد الاول (a) هو 5

الاساس (d) هو 4

بالتالي

$$a_n = a + (n-1)d = 5 + (n-1)\,4 = 4n+1$$

مثال:

بين ان المتتالية ....,3,7,11

هي متتالية حسابية ثم جد حدها العام

بما ان الفرق بين اي حدين متتالين هو مقدار ثابت (4) فاننا نعتبرها متتالية حسابية وللتاكد من ذلك سيتم دراسة الفرق بين كل حدين متتالين

7-3=4

11-7=4

a=3

بالتالي

$$a_n = a + (n-1)d = 3 + (n-1)4 = 4n - 1$$

4) المتسلسلات الحسابية (Arithmetic Series)

يقال ان هناك عالم رياضيات اسمه جاوس كان طالبا مشاغبا وارد المدرس تاديبه من خلال الطلب منه ان يوجد مجموع الاعداد الصحيحة من 1 وحتى 100 عقابا له على سلوكه السيء وتوقع المدرس ان يحتاج كامل الحصة لحساب هذا المجموع الا انه تفاجئ بان جاوس احتاج الى دقائق معدوده لايجاد هذا المجموع والذي يساوي 5050 هذه ليست قصة لتسلية ولكن هذا كان الاساس لظهور ما يسمى بالمستسلسلة الحسابية

توصل جاوس الى المجموع بالطريقة التالية

$$c = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 \;\ldots\ldots\ldots (1)$$

وهذا يعبر عن مجموع الاعداد من 1 وحتى 100 بمعنى انه قام بوضعهم في متسلسلة اولها 1 واخرها 100 واساسها 1، وكذلك الفرق بين اي حدين متتاليين هو مقدار ثابت يساوي 1 وبما ان الجمع عملية تبديلة قام بكتابة المتسلسلة بطريقة معكوسة

$$c = 100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1 \;\ldots\ldots\ldots (2)$$

ثم جمع المعادلتين (1) و (2)

$$c = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$$

$$+$$

$$c = 100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1$$

ينتج

$$c = 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 + 101$$

$$2c = 101 \times 100$$

$$\frac{2c}{2} = \frac{101 \times 100}{2}$$

$$c = \frac{10010}{2} = 5050$$

تعد طريقة جاوس في حل هذه المسالة الاساس لايجاد مجموع اول (n)من حدود متسلسلة حسابية معلومة

$$a_1 = a$$

$$c_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

وعند عكس ترتيب الحدود

$$c_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

عند جمع الحدود ينتج

$$c_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

$$c_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

$$2c_n = n(a_1 + a_n)$$

$$2\frac{c_n}{2} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$c_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

ويمكن ايجاد n حد من متسلسلة حدها الاول وحدها الاخير معلومين اما اذا كان الحد الاخير غير معلوم فيمكن الاستعاضة عنه بالصيغة التالية

$$c_n = \frac{n}{2}(2a \quad + (n-1)d)$$

مثال

اوجد مجموع المتسلسلة الاتية

$$2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29$$

المتسلسلة حسابية لاحظ ان الفرق بين كل حد والذي يسبقه هو مقدار ثابت حيث:

5-2=3 8-5=3 11-8=3 14-11=3 17-14=3 20-17=3 ..... 29-26=3

بتالي فان الفرق (d) هو 3

والحد الاول هو (a)2

وعدد الحدود (n)هو 10

بالتالي حسب القانون

$$c_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{10}{2}(2 + 29) = 5(31) = 155$$

مثال

اوجد مجموع المتسلسلة الاتية

$$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$$

المتسلسلة حسابية يلاحظ بان الفرق بين كل حد والذي يسبقه هو مقدار ثابت

5-3=2 7-5=2 ….. 17-15=2

بتالي فان الفرق (d) هو 2

والحد الاول هو (a)3

وعدد الحدود (n)هو 8

بالتالي حسب القانون

$$c_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{8}{2}(3 + 17) = 4(20) = 80$$

مثال

اوجد مجموع للتسلسلة الاتية

$$3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18$$

المتسلسلة حسابية لاحظ ان الفرق بين كل حد والذي يسبقه هو مقدار ثابت لاحظ

6-3=3 9-6=3…18-15=3

بتالي فان الفرق هو (d) هو 3

والحد الاول هو (a)3

وعدد الحدود (n)هو 6

بالتالي حسب القانون

$$c_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{6}{2}(3 + 18) = 3(21) = 63$$

5) المتتالية الهندسية (Geometric Sequence)

هي المتتالية التي يكون فيها النسبة بين كل حد والحد السابق له مباشرة نسبة ثابتة تسمى باساس المتتالية ويرمز له بالرمز (r) والحد الاول (a)

مثال:

3 , 6 , 12 , 24

المتتالية يكون اساسها (r=3) والحد الاول (a=3)

$$a_1 = 3 = a \times r^0 = a = 3$$

$$a_2 = 6 = a \times r^1 = 3 \times 2 = 6$$

عندما نتحدث عن الاس فهذا يعني ضرب العدد بنفسة عدد مرات الاس بمعنى

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$a_3 = 12 = a \times r^2 = 3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$$

$$a_4 = 24 = a \times r^3 = 3 \times 2^3 = 3 \times 8 = 24$$

$$a_n = a \times r^{(n-1)}$$

بتالي فان الشكل العام لتسلسلة هندسية اساسها (r) وحدها الاول (a)

$$a\,, a \times r, a \times r^2, a \times r^3, \ldots, a \times r^{(n-1)}$$

$$a\,, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{(n-1)}$$

ولتعيين اي متتالية حسابية يكفي معرفة الحد الاول والاساس

مثال:

اكتب الحدود الخمسة الاولى لمتتالية هندسية اساسها 3 وحدها الاول 2

$$a_1 = a \times r^0 = a = 2$$

$$a_2 = a \times r^1 = 2 \times 3 = 6$$

$$a_3 = a \times r^2 = 2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$$

$$a_4 = a \times r^3 = 2 \times 3^3 = 2 \times 27 = 54$$

$$a_5 = a \times r^4 = 2 \times 3^4 = 2 \times 81 = 162$$

مثال

اكتب الحدود الاربعة الاولى لمتتالية هندسية اساسها 4 وحدها الاول 1

$$a_1 = a \times r^0 = a = 1$$

$$a_2 = a \times r^1 = 1 \times 4 = 4$$

$$a_3 = a \times r^2 = 1 \times 4^2 = 1 \times 16 = 16$$

$$a_4 = a \times r^3 = 1 \times 4^3 = 1 \times 64 = 64$$

6) المتسلسلات الهندسية المنتهية (Finite Geometric Series)

عرفنا المتتالية الهندسية التي اساسها (r) وحدها الاول (a)

$$a\ , ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{(n-1)}$$

بالتالي فان المتسلسلة الهندسية

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{(n-1)}$$

لايجاد مجموع اول n حد افرض ان

$$c_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{(n-1)} \ldots\ldots(1)$$

وبضرب المعادله 1 باساس المتتالية ينتج

$$rc_n = ra + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^n \ldots\ldots(2)$$

وبطرح المعادلة 1من 2 ينتج

$$rc_n = ra + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^n$$

$$-$$

$$c_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{(n-1)}$$

$$(r-1)c_n = (ra - a) + (ar^2 - ar) + (ar^3 - ar^2) + (ar^4 - ar^3) + \cdots + (ar^n - ar^{n-1})$$

$$=a(r-1)+ar(r-1)+ar^2(r-1)+ ar^3(r-1)+\cdots+ar^{n-1}(r-1)$$

$$(r-1)c_n=a(r^n-1)$$

$$(r-1)\frac{c_n}{(r-1)}=\frac{a}{(r-1)}(r^n-1)$$

$$c_n=\frac{a}{(r-1)}(r^n-1)$$

بشرط ان الاساس لا يساوي 1

اما اذا كان الاساس يساوي 1 فان

$$c_n=a+a+a+a+\cdots+a=a\times n$$

$$c_n=a\times n$$

مثال:

جد مجموع الحدود الستة الاولى من المتسلسلة

64+32+16+……

هذه المتسلسلة هندسية حدها الاول 64 والاساس $\frac{1}{2}$ بالتالي فان المجموع c_n يساوي

$$c_6=\frac{a}{(r-1)}(r^6-1)=\frac{64}{(\frac{1}{2}-1)}((\frac{1}{2})^6-1)=\frac{64}{-(\frac{1}{2})}((\frac{1}{2})^6-1)=2(63)=126$$

مثال:

جد مجموع الحدود الخمسة الاولى من المتسلسلة

2+4+6+……

هذه المتسلسلة هندسية حدها الاول 2 والاساس 2 بالتالي فان المجموع c_n يساوي

$$c_5 = \frac{a}{(r-1)}(r^5 \quad -1) = \frac{2}{(2-1)}((2)^5 \quad -1) = \frac{2}{1}(32 \quad -1) = \; 2(31)=62$$

7) المتسلسلات الهندسية الغير منتهية

(Infinite Geometric Series)

عرفنا في البند السابق ان مجموع n حداً في متسلسلة هندسية حدها الاول (a) واساسها (r) تعطى بالعلاقة التالية:

$$c_n = \frac{a}{(r-1)}(r^n \quad -1)$$

السؤال المطروح هل يمكننا ايجاد مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية للاجابة عن هذا السؤال يتم في حالة واحدة فقط وهي ان تكون المتسلسة متقاربة ولكن ما معنى ان المتسلسة متقاربة وسيوضح ذلك بالمثال التالي:

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots \ldots$$

لاحظ من خلال هذه المتسلسلة:

الحد الاول يساوي 2 والاساس يساوي $\frac{1}{4}$ كلما زادت قيمة n فان حدود المتسلسلة تتناقص قيمتها بمعنى ان قيمة r^n تتناقص كلما زادت قيمة n بحيث تقترب من الصفر وذلك يعني ان مجموع المتتالية يقترب من القيمة $\frac{a}{(1-r)}$ ومثل هذه المتسلسلات تسمى بالمتسلسلات غير المنتهية المتقاربة اما اذا كانت غير متقاربة فان مجموعها يساوي $\infty - or\ \infty$ تكون المتسلسلة الهندسية غير منتهية التي حدها الاول a واساسها r متقاربة اذا

كانت $(-1 < r < 1)$ ويكون مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية متقاربة هو:

$$c_\infty = \frac{a}{(1-r)}$$

اما اذا كانت قيمة $(r > 1)$ او قيمة $(r < -1)$ فان المتسلسة الهندسية غير متقاربة

مثال:

جد مجموع المتسلسلة

$$0.3 + 0.03 + 0.003 + \ldots..$$

$$r = \frac{0.03}{0.3} = 0.1$$

لاحظ ان قيمة الاساس يقع ضمن الفترة $(-1 < r < 1)$ اذا فان مجموع المتسلسلة هو

$$c_\infty = \frac{a}{(1-r)} = \frac{0.3}{(1-0.1)} = \frac{1}{3}$$

مثال:

جد مجموع المتسلسلة:

$$0.2 + 0.02 + 0.002 + \ldots..$$

$$r = \frac{0.02}{0.2} = 0.1$$

لاحظ ان قيمة الاساس يقع ضمن الفترة $(-1 < r < 1)$ اذا فان مجموع المتسلسلة هو:

$$c_\infty = \frac{a}{(1-r)} = \frac{0.2}{(1-0.1)} = \frac{0.2}{0.9} = \frac{2}{9}$$

Examples of Sequence &Series

السؤال الاول: اكتب الحدود الثالثة الاولى لمتسلسلة التالية:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{(1-2r)}$$

الحل

$$a_1 = \frac{1}{(1-2(1))} = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = 1$$

$$a_2 = \frac{2}{(1-2(2))} = \frac{2}{1-4} = \frac{2}{-3}$$

$$a_3 = \frac{3}{(1-2(3))} = \frac{3}{1-6} = \frac{3}{-5}$$

السؤال الثاني: اكتب الحدود الثالثة الاولى لمتسلسلة التالية:

$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(1-3r)}$

الحل

$$a_1 = \frac{1}{(1-3(1))} = \frac{1}{1-3} = \frac{1}{-2}$$

$$a_2 = \frac{1}{(1-3(2))} = \frac{1}{1-6} = \frac{1}{-5}$$

$$a_3 = \frac{1}{(1-3(3))} = \frac{1}{1-9} = \frac{1}{-8}$$

السؤال الثالث: استخدم رمز المجموع ($\sum$) لتعبير عن المتسلسلات التالية:

1) 3+5+7+9+11+13

2) $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}$

الحل

1) 3+5+7+9+11+13

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

n 1 2 3 4 5 6

$a_1 = 3 = 2(1) + 1$

$a_2 = 5 = 2(2) + 1$

$a_3 = 7 = 2(3) + 1$

$a_n = 2n + 1$

$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = \sum_{r=1}^{6} 2r + 1$

2) $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}$

↓ ↓ ↓ ↓

n 1 2 3 4

$a_1 = \frac{1}{3} = \frac{1}{3^1}$

$a_2 = \frac{2}{9} = \frac{2}{3^2}$

$$a_3 = \frac{3}{27} = \frac{3}{3^3}$$

$$a_n = \frac{n}{3^n}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} = \sum_{r=1}^{6} \frac{r}{3^r}$$

السـؤال الرابـع: اوجـد الحـد العـام للمتتاليـات التاليـة لتعـبير عـن المتسلسلات التالية:

1) 1 , -1 , 1 ,-1

2) $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{-1}{16}$

الحل

1)1 , -1 , 1 ,-1

↓ ↓ ↓ ↓

n 1 2 3 4

$$a_1 = 1 = (-1)^0$$

$$a_2 = 1 = (-1)^1$$

$$a_3 = -1 = (-1)^2$$

..

$$a_n = (-1)^{n-1}$$

2) $\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{-1}{16}$

n 1 2 3 4

$$a_1 = \frac{(-1)^{1-1}}{(2^1)} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{(-1)^{2-1}}{(2^2)} = \frac{-1}{4}$$

$$a_3 = \frac{(-1)^{3-1}}{(2^3)} = \frac{(-1)^2}{8} = \frac{-1}{8}$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2^{n-1})}$$

السؤال الخامس: اوجد الحد الرابع والحد الاول للمتسلسلة

$$\sum_{r=1}^{30} 4r - 1$$

الحل:

$$a_1 = 4(1) - 1 = 4 - 1 = 3$$
$$a_4 = 4(4) - 1 = 16 - 1 = 15$$

السؤال السادس: اوجد الحد الثالث والحد الاول للمتسلسلة

$\sum_{r=1}^{30} 3r - 2$

الحل

$$a_1 = 3(1) - 2 = 6 - 2 = 4$$

$$a_3 = 3(3) - 2 = 9 - 2 = 7$$

السؤال السابع: جد الحد العام للمتتالية الحسابية التالية

1) حدها الاول 2 واساسها 3

2) اساسها 5 وحدها الثاني 12

3) اساسها 6 وحدها الاول 3

الحل: القانون العام هو:

$$a_n = a + (n-1)d$$

1) $a_n = 2 + (n-1)3 = 2+3n-3 = 2n-1$

2) $a_n = a + (n-1)d$

$a_1 = a_2 - 5 = 12 - 5 = 7$

$a_n = 7 + (n-1)5 = 7+5n-5 = 2+5n$

$= 2+5n$

3) $a_n = 3 + (n-1)6 = 3+6n-6 = 6n-3$

السؤال الثامن: جد الاساس والحد الاول للمتتالية الحسابية والعائدة للحد العام a_n التالية

1) $a_n = 2n - 5$

2) $a_n = \frac{-1}{2} n + 7$

الحل

1) $2n - 2 - 5 + 2$

$$2(n-1)-3$$

=2n-2-5+2=2(n-1)-3=-3+2(n+1)

الحد الاول 3- والاساس 2

$$2)\ a_n = \frac{-1}{2}n + 7 = \frac{-1}{2}n + 7 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-1}{2}n + \frac{1}{2} + 7 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-1}{2}(n+1) + 6.5 = 6.5 + (n+1)(\frac{-1}{2})$$

الحد الاول 6.5 والاساس $\frac{-1}{2}$

السؤال التاسع: بين ان المتتالية التالية هندسية ثم جد الحد السادس

$$3,1,\frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{9}\ \ ,\dots\dots$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{(\frac{1}{9})}{(\frac{1}{3})} = \frac{1}{3}$$

المتتالية هندسية واساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الاول 3

$$a_n = ar^{n-1} = 3(\frac{1}{3})^{n-1}$$

السؤال لعاشر: بين ان المتتالية التالية هندسية ثم جد الحد الخامس

$$2,1,\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\ \ ,\dots\dots$$

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a_3}{a_2}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a_4}{a_3}=\frac{(\frac{1}{4})}{(\frac{1}{2})}=\frac{1}{2}$$

المتتالية حسابية واساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الاول2

$$a_n=ar^{n-1}=2(\frac{1}{2})^{n-1}$$

$$a_5=2(\frac{1}{2})^{5-1}=2(\frac{1}{2})^4=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$$

السؤال الحادي عشر: جد مجموع المتتالية الهندسية التي حدها الاول 16 واساسها $-\frac{1}{2}$ ثم جد الحد السادس وصند حدودها 5

$$c_5=\frac{a(r^5-1)}{(r-1)}$$

$$c_5=\frac{16((\frac{1}{2})^5-1)}{(-\frac{1}{2}-1)}$$

$$c_5=\frac{16(\frac{1}{32}\ \ -1)}{(-1.5)}$$

The Second Unit

Exponential and Logarithmic Function

The Second Unit

Exponential and Logarithmic Function

1) Exponential and Logarithmic Function and Logarithmic Base 10

2) Graphs of Exponential and logarithm Function .

3) Natural Exponential Function

4) Natural Logarithms base e.

5) Logarithms Lows

1) Exponential and Logarithmic Function and Logarithmic Base 10

Def of Exponential and Logarithmic Function s

يسمى الاقتران (f) المعرف بالقاعده

$f(x) = a^x \qquad x \in R \quad a > 0 \; and \; a \neq 1$

بالاقتران الاسي (Exponential Functions)

Examples:

1) $f(x) = 2^x$

2) $f(x) = (\frac{1}{3})^x$

3) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

4) $f(x) = (5)^x$

تعريف الاقتران: هو علاقة تربط كل عنصر بالمجال (domain) x بعنصر واحد بالمدى (range)

1) $f(x) = 2^x$

$f(1) = 2^1 = 2$

$f(2) = 2^2 = 4$

$f(3) = 2^3 = 8$

2) $f(x) = (\frac{1}{3})^x$

$$f(1) = \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$$

$$f(2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$f(3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

3) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

$$f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

مجال الاقتران الاسي (Domain of Exponential function) دائما يكون كل الاعداد التي تنتمي لمجموعة الاعداد الحقيقية (Real number (R)).

مدى الاقتران الاسي (Range of Exponential function) دائما يكون كل الاعداد التي تنتمي لمجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة (Positive Real number (R^+))

الاقتران الاسي (Exponential function) يكون متزايد (increasing) اذا كان الاساس اكبر من 1

الاقتران الاسي (Exponential function) يكون متناقص (decreasing) اذا كان الاساس اقل من 1

وسيتم توضيح ذلك من خلال الرسم

Def of Logarithmic Functions

If $a > 0 \; and \; a \neq 1 \; then$

$y = log_a(x)$

↓

الاساس

(Domain of Logarithmic Function) مجال الاقتران اللوغرتمي

دائما يكون كل الاعداد التي تنتمي لمجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة (Positive Real number (R^+))

((Range of Logarithmic Function) مدى الاقتران اللوغرتمي

دائما يكون كل الاعداد التي تنتمي لمجموعة الاعداد الحقيقية .(Real number (R))

Example:

$log_2(32) = log_2(2)^5 = 5$

$log_3(81) = log_3(3)^4 = 4$

$log_7(49) = log_7(7)^2 = 2$

$log_2(2) = log_2(2)^1 = 1$

$log_1(20) = log_1(20)^1 = 20$

$log_1(10) = log_1(10)^1 = 10$

$log_1(5) = log_1(5)^1 = 5$

$log_4(16) = log_4(4)^4 = 4$

Def of Logarithmic Function Base to 10

If $a = 10$ $then$

$y = log_{10}(x)$

10 =الاساس

وتعتبر هذه اللوغرتمات الاكثر شيوعا وتكتب للاختصار log

Example:

$log_{10}(100) = log_{10}(10)^2 = 2$

$log_{10}(1000) = log_{10}(10)^3 = 3$

$log_{10}(10000) = log_{10}(10)^4 = 4$

$log_{10}(100) = log_{10}(10)^2 = 2$

$log_{10}(10) = log_{10}(10)^1 = 1$

$log_{10}1 = log_{10}(10)^0 = 0$

$log_{10}0.1 = log_{10}(10)^{-1} = -1$

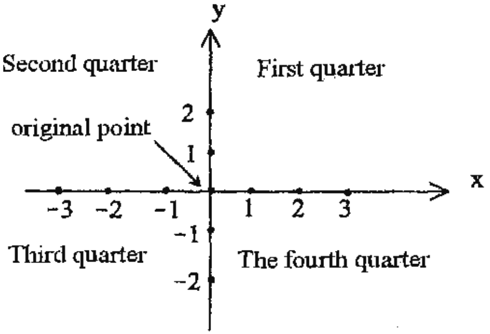
$log_{10}0.01 = log_{10}(10)^{-2} = -2$

$log_{10}0.001 = log_{10}(10)^{-3} = -3$

Exponential	Base	Power	Logarithm
$3^4 = 81$	3	4	$4 = log_3 81$
$7^2 = 49$	7	2	$2 = log_7 49$
$5^4 = 625$	5	4	$4 = log_5 625$
$6^3 = 216$	6	3	$3 = log_6 216$
$8^2 = 64$	8	2	$2 = log_8 64$
$x^y = a$	X	Y	$y = log_x a$

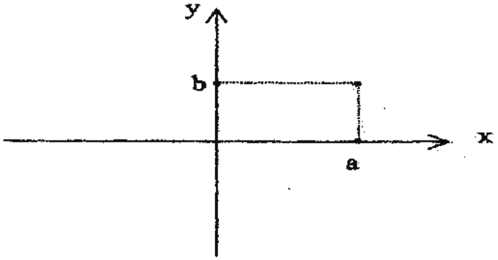
2) Graphs of Exponential and logarithm Functions

المستوى الديكارتي والاحداثيات



كيفية تمثيل الاحداثيات في المستوى الديكارتي

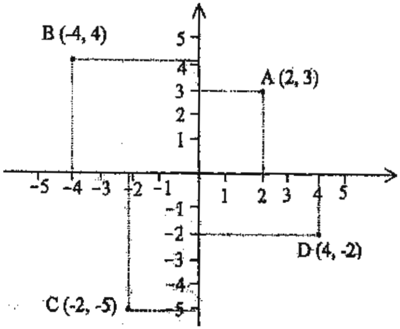
النقطه (a,b) يتم تمثيلي على المنحنى كالاتي،



مثال

عين الازواج المرتبة

$A(2,3)$, $B(-4,4)$, $C(-2,-5)$, $D(4,-2)$



Graph of Exponential Function

ارسم منحنى الاقتران المعطى بالقاعده التالية

$f(x) = 2^x$

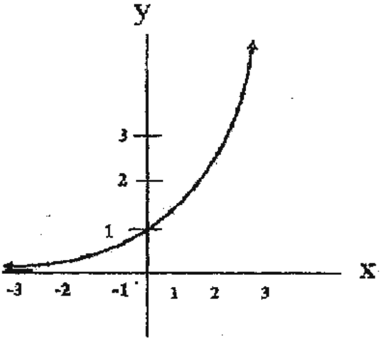
$f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{8}$ | $f(3) = 2^3 = 8$

$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ | $f(2) = 2^2 = 4$

$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ | $f(1) = 2^1 = 2$

$f(0) = 2^0 = 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



ملاحظات على الشكل الناتج

قيم $f(0) > 0$

عندما $(x=0)$ فان $f(0)=1$

تزداد (increasing) بازدياد قيم x

ارسم منحنى الاقتران المعطى بالقاعده التالية

$g(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$

$g(-3) = (2)^{--3} = 2^3 = 8$

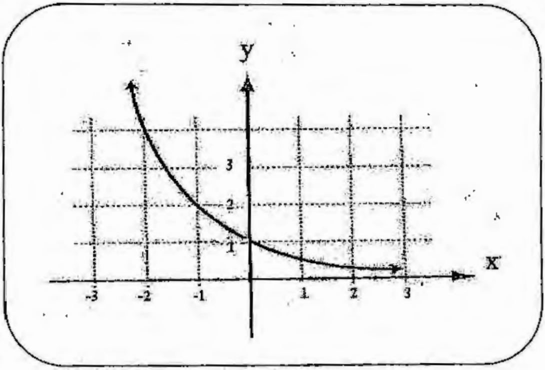
$g(3) = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

$g(-2) = (2)^{--2} = 2^2 = 4$

$g(2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

$g(-1) = (2)^{--1} = 2 = 2$

$g(1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$



ملاحظات على الشكل الناتج

قيم $L(0) < 0$

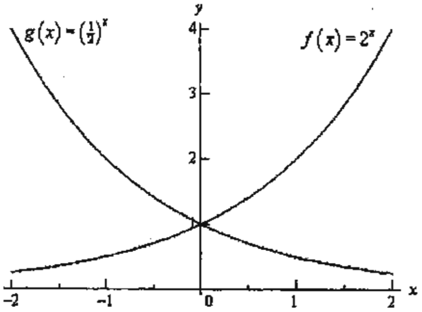
عندما $(x=0)$ فان $L(0)=1$

تتناقص (decreasing) بازدياد قيم x

نلاحظ ان:

$$f(x)=L(-x)$$

بمعنى ان $L(x)$ هو انعكاس ل $f(x)$ على محور y



Graph of logarithm Function

ارسم منحنى الاقتران المعطى بالقاعده التالية

$f(x) = log_2 x$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = log_2 \frac{1}{4} = log_2 (\frac{1}{2})^2 = log_2 (2)^{-2} = -2$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = log_2 \frac{1}{2} = log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = log_2 (2)^{-1} = -1$

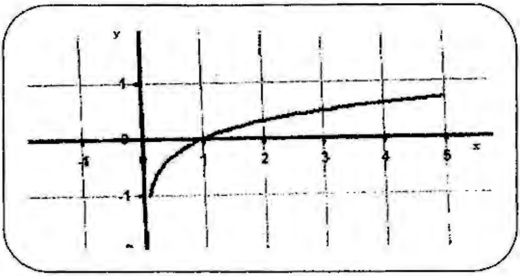
$f(1) = log_2 1 = log_2 (2)^0 = 0$

$f(2) = log_2 2 = log_2 (2)^1 = log_2 (2)^1 = 1$

$f(4) = log_2 4 = log_2 (2)^2 = 2$

$f(8) = log_2 8 = log_2 (2)^3 = 3$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
f(x)	-2	−1	0	1	2	3

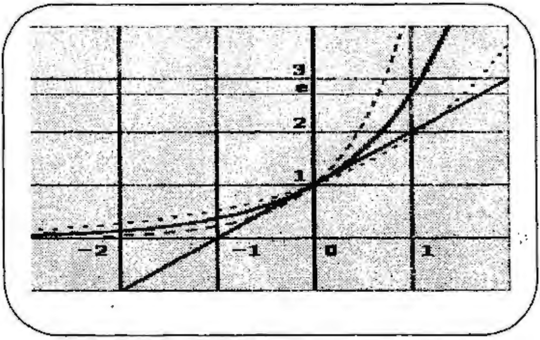


3) Natural Exponential Function

هو اقتران اسي ولكن اساسه العدد النيبيري (e) ولكن ما هو العدد النيبيري

$$e \approx 2.71828$$

قيمة العدد النيبيري هي قيمة تقريبه لا نستطيع حساب هذه القيمة بدقة



1) e^2 =7.3890561

2) e^{-1} =0.3678794

3) e^0 =1

مثال ارسم منحنى الاقتران

$$f(x) = 1 - 5e^{1-\frac{x}{2}}$$

نختار الاعداد التالية 3,-2,2,-1,0,1 ونجد صورهم في الاقتران

$$f(-2) = 1 - 5e^{1-\frac{-2}{2}} = 1 - 5e^2 = -35.9453$$

$$f(-1) = 1 - 5e^{1-\frac{-1}{2}} = 1 - 5e^{1.5} = -21.4084$$

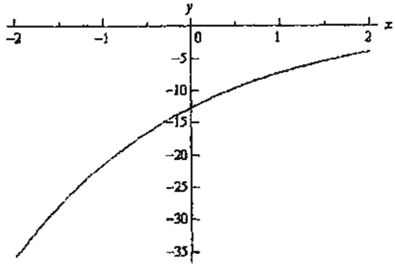
$$f(0) = 1 - 5e^{1-0} = 1 - 5e^1 = -12.5914$$

$$f(1) = 1 - 5e^{1-\frac{1}{2}} = 1 - 5e^{0.5} = -7.2436$$

$$f(2) = 1 - 5e^{1-\frac{2}{2}} = 1 - 5e^0 = -4$$

$$f(3) = 1 - 5e^{1-\frac{3}{2}} = 1 - 5e^{-0.5} = -2.0327$$

X	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	−35.9453	−21.4084	−12.5914	−7.2436	−4	−2.0327



4) Natural Logarithms base e

هو اقتران اساسه e وتسمى مثل هذه الاقتران بالاقتران اللوغرتمي الطبيعي
ويرمز له بالرمز ln

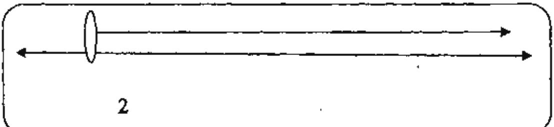
1) ln2 =7.3890561

2) ln0.3 =-1.2039

مثال اوجد مجال الاقتران

$$f(x) = \ln(x-2)$$

الاقتران f(x) يكون معرف عندما (x-2>0) بتالي فان



x>2

بالتالي مجال f هو $(2,\infty)$

مثال اوجد مجال الاقتران

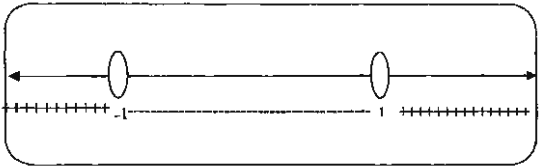
$$f(x) = \ln(x^2 - 1)$$

الاقتران $f(x)$ يكون معرف عندما $x^2 - 1 > 0$

$$(x + 1)(x - 1) > 0$$

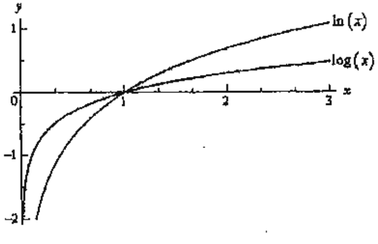
$$(x + 1) = 0 \rightarrow x = -1$$

$$(x - 1) = 0 \rightarrow x = 1$$



بتالي مجال f هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

ويمكن توضيح العلاقة بين اللوغاريتم $(\log)$ اللوغاريتم للاساس e $(\ln)$ من خلال الشكل



5) Logarithms Lows

1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_a x^n = n \log_a x$

4) $\log_a x = \log_a y \quad \leftrightarrow \quad x = y$

5) $\log_a a^x = x$

6) $\log 1 = 0$

7) $\log_a a = 1$

مثال اذا كان $log_3 2 \approx 0.6309$ اوجد

1) $log_3 8$ 2) $log_3 9$ 3) $log_3 10 - log_3 5$

باستخدام القانون (3)

$log_3 8 = log_3 2^3$

$= 3log_3 2$

$= 3(0.6309) = 1.8927$

2) $log_3 9 = log_3 3^2$

$= 2log_3 3$

$= 2(1) = 2$

3) $log_3 10 - log_3 5 = log_3 \frac{10}{5}$

$log_3 \frac{10}{5} = log_3 2 = 0.6309$

4) $\frac{1}{2}(log_3 900 - log_3 225) = \frac{1}{2} log_3 900 - \frac{1}{2} log_3 225$
$= log_3 (900)^{\frac{1}{2}} - log_3 (225)^{\frac{1}{2}}$
$= log_3 30 - log_3 15 = log_3 \frac{30}{15} = log_3 2$
$= 0.6309$

طريقة اخرى

$\frac{1}{2}(log_3 900 - log_3 225) = \frac{1}{2} log_3 \frac{900}{225} = \frac{1}{2} log_3 4 = log_3 4^{\frac{1}{2}}$
$= log_3 2 = 0.6309$

5) $log_3 60 - log_3 30 = log_3 \frac{60}{30}$

$log_3 \frac{60}{30} = log_3 2 = 0.6309$

$= 0.6309$

Examples of Exponential and Logarithmic Function

السؤال الاول: اوجد قيمة اللوغريتمات التالية:

$1 - log_{10}(1000) = log_{10}(10)^3 = 3$

$2 - log_{10}(0.01) = log_{10}(10)^{-2} = -2(1) = -2$

$3 - log_3(3) = 1$

$4 - log_{10}(100) = log_{10}(10)^2 = 2$

$5 - log_{10}(0.1) = log_{10}(10)^{-1} = -1(1) = -1$

$6 - log_4(16) = log_4(4)^4 = 4(1) = 4$

$7 - log_8(64) = log_8(8)^2 = 2$

$8 - log_6(36) = log_6(6)^2 = 2$

$9 - log_9(99) = log_9(9)^2 = 2$

$10 - log_7(343) = log_7(7)^3 = 3$

$11 - log_{11}(1331) = log_{11}(11)^3 = 3$

السؤال الثاني

اذا كان $log_3 2 \approx 0.6309$ اوجد

باستخدام القانون (3)

$1) log_3 4 = log_3 2^2$

$= 2log_3 2$

$= 2(0.6309) = 12618$

$2) log_3 81 = log_3 3^4$

$= 4log_3 3$

$= 4(1) = 4$

$3) log_3 16 = log_3 2^4$

$= 4log_3 2$

$= 4(0.6309) = 2.5236$

$4) log_3 27 = log_3 3^3$

$= 3log_3 3$

$= 3$

السؤال الثالث: اذا كان

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

اوجد

$1-f(0) \quad 2-f(1) \quad 3-f(2) \quad 4-f(3)$

$5-f(4) \quad 6-f(5) \quad 7-f(6) \quad 8-f(7)$

$1-f(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$ $\qquad$ $2-f(1)=\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$

$3-f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ $\qquad$ $4-f(3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

$5-f(4)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ $\qquad$ $6-f(5)=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

$7-f(6)=\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$ $\qquad$ $8-f(7)=\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{132}$

اذا كان

$f(x)=(2)^{x^2}$

اوجد

$1-f(0) \quad 2-f(1) \quad 3-f(2) \quad 4-f(3)$

$5-f(-1) \quad 6-f(-2)$

$1-f(0)=(2)^{0^2}=(2)^0=1$ $\qquad$ $2-f(1)=(2)^{1^2}$

$=(2)^1=2$

$3-f(2)=(2)^{2^2}=(2)^4=16$ $\qquad$ $4-f(3)=(2)^{3^2}$

$=(2)^9=512$

$5-f(-1)=(2)^{-1^2}=(2)^1=2$ $\qquad$ $6-f(-2)=(2)^{-2^2}$

$=(2)^4=16$

السؤال الرابع: اوجد قيمة x في المعادلات التالية

1) $x = log_5 125$

$$x = log_5 125 = log_5 5^3 = 3$$

بالتالي فان قيمة xتساوي 3

2) $-4 = log_2 x$

بالتالي فان قيمة X تساوي $2^{-4} = \frac{1}{16}$

3) $2 = log_3 x$

بالتالي فان قيمة xتساوي $3^2 = 9$

4) $\frac{1}{2} = log_3 x$

قيمة xتساوي $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

5) $\frac{1}{2} = log_4 x$

قيمة xتساوي $4^{\frac{1}{2}} = 2$

6) $x = log_9 81\sqrt{3}$

$$81\sqrt{3} = 3^4 \times 3^{0.5} = 3^{\frac{8}{2}+\frac{1}{2}} = 3^{\frac{9}{2}} = 3^{\frac{9\times2}{2\times2}} = 3^{\frac{9\times2}{4}} = (3^2)^{\frac{9}{4}} = (9)^{\frac{9}{4}}$$

$$x = log_9 (9)^{\frac{9}{4}}$$

بالتالي فان قيمة Xتساوي $\frac{9}{4}$

7) $x = log_3 243$

$243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$

$x = log_3 243 = log_3 3^5$

بالتالي فان قيمة X تساوي5

8)$x = log_6 1296$

$1296 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4$

$x = log_6 1296 = log_6 6^4$

بالتالي فان قيمة X تساوي4

9)$x = log_4 4096$

$4096 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^6$

$$x = log_4 4096 = log_4 4^6$$

بالتالي فان قيمة X تساوي 6

10) $x = log_{10} 100000$

$243 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 103^5$

$x = log_{10} 100000 = log_{10} 10^5$

بالتالي فان قيمة X تساوي5

السؤال الخامس: اكتب القيم التالية بصيغة اقتران اسي

1) $log_2 32 = 5$

$log_2 32 = 5 \rightarrow log_2 2^5 = 5 \rightarrow 2^5 = 32$

2) $log_2 16 = 4$

$log_2 16 = 4 \rightarrow log_2 2^4 = 4 \rightarrow 2^4 = 16$

3) $log_3 81 = 4$

$log_3 81 = 4 \rightarrow log_3 3^4 = 4 \rightarrow 3^4 = 81$

4) $log_4 64 = 3$

$log_4 64 = 3 \rightarrow log_4 4^3 = 3 \rightarrow 4^3 = 64$

5) $log_5 125 = 3$

$log_5 125 = 3 \rightarrow log_5 5^3 = 3 \rightarrow 5^3 = 125$

6) $log_3 243 = 5$

$log_3 243 = 5 \rightarrow log_5 3^5 = 5 \rightarrow 3^5 = 243$

7) $log_6 1296 = 4$

$log_6 1296 = 4 \rightarrow log_6 6^4 = 3 \rightarrow 6^4 = 1296$

8) $log_7 117649 = 6$

$log_7 117649 = 6 \rightarrow log_7 7^6 = 6 \rightarrow 7^6 = 117649$

9) $log_2 279936 = 7$

$log_6 279936 = 6 \rightarrow log_6 6^7 = 7 \rightarrow 6^7 = 279936$

10) $log_9 6561 = 4$

$$log_6 6561 = 4 \rightarrow log_6 9^4 = 4 \rightarrow 9^4 = 6561$$

السؤال السادس: اوجد قيمة x في المعادلات التالية

1) $lnx = 2$

$$x = e^2$$

2) $lnx + ln2 = 3$

$$lnx + ln2 = ln2x = 3 \rightarrow 2x = e^3 \rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{e^3}{2} \rightarrow x = \frac{e^3}{2}$$

$$x = \frac{e^3}{2}$$

3) $lnx - ln4 = 5$

$$lnx - ln4 = ln\frac{x}{4} = 5 \rightarrow \frac{x}{4} = e^5 \rightarrow \frac{x}{4} = e^5 \rightarrow x = 4e^5$$

$$x = 4e^5$$

4) $lnx + ln2 + ln\frac{1}{2} = 4$

$$lnx + ln2 + ln\frac{1}{2} = \ln\left(2 \times x \times \frac{1}{2}\right) = 4 \rightarrow x = e^4$$

$$\mathrm{x} = \mathrm{e}^4$$

5) $lnx - ln3 - ln2 = 6$

$$lnx - ln3 - ln2 = ln\frac{x}{3 \times 2} = 6 \rightarrow \frac{x}{6} = e^6 \rightarrow x = 6e^6$$

$$x = 6e^6$$

6) $lnx + ln5 - ln6 = 9$

$lnx + ln5 - ln6 = ln5 \times x \times \frac{1}{6} = 9 \rightarrow \frac{5x}{6} = e^9 \rightarrow x = \frac{6}{5}e^9$

$$x = \frac{6}{5}e^9$$

7) $lnx + ln5 - ln\frac{1}{5} = 3$

$lnx + ln5 - ln\frac{1}{5} = ln5 \times x \times \frac{1}{\frac{1}{5}} = 9 \rightarrow 25x = e^9 \rightarrow x = \frac{1}{25}e^9$

$$x = \frac{1}{25}e^9$$

8) $ln7x^3 - ln6x^2 = 7$

$ln7x^3 - ln6x^2 = ln\frac{7x^3}{6x^2} = 7 \rightarrow ln\frac{7}{6}x = 7 \rightarrow x = \frac{6}{7}e^7$

$$x = \frac{6}{7}e^7$$

9) $ln3x^3 - ln4x^4 = 12$

$ln3x^3 - ln4x^4 = ln\frac{3x^3}{4x^4} = 12 \rightarrow ln\frac{3}{4x} = 12 \rightarrow \frac{3}{4x} = e^{12} \rightarrow x = \frac{3}{4e^{12}}$

$$x = \frac{3}{4e^{12}}$$

10) $ln\sqrt[2]{x^3} = 12$

$$lnx^{\frac{3}{2}} = 12 \rightarrow \frac{3}{2} lnx = 12 \rightarrow lnx = \frac{3}{2} \times 12 \rightarrow lnx = 18 \rightarrow x = e^{18}$$

$$x = e^{18}$$

السؤال السابع: اوجد قيمة X في المعادلات التالية:

1) $e^{3x} = 2$

$$e^{3x} = 2 \rightarrow 3x = ln2 \rightarrow x = \frac{ln2}{3}$$

2) $e^{3x+1} = 3ln4$

$$e^{3x+1} = 3ln4 \rightarrow 3x + 1 = \ln(3ln4) \rightarrow 3x = \ln(3ln4) - 1$$

$$x = \frac{\ln(3ln4) - 1}{3}$$

$$x = \frac{\ln(3ln4) - 1}{3}$$

3) $e^{x^2-2x+1} = 1$

$$e^{x^2-2x+1} = 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = \ln(1) \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1) = 0$$

4) $e^{4x} = \sqrt{3}$

$$e^{4x} = \sqrt{3} \rightarrow 4x = ln\sqrt{3} \rightarrow 4x = \frac{1}{2} ln3 \rightarrow x = \frac{ln2}{8}$$

$$x = \frac{ln2}{8}$$

5) $e^{100x} = -1$

$$e^{100x} = -1 \rightarrow 100x = ln - 1$$

لا يوجد حل للمعادلة حيث لا يوجد لوغاريتم للاعداد السالبة

السؤال التاسع: اكتب اللوغاريتمات التالية بابسط صورة

1) $log\frac{ab}{c} \quad : c > 0 \;\; ab > 0$

$$log\frac{ab}{c} = logab - logc = loga + logb - logc$$

$$log\frac{ab}{c} = loga + logb - logc$$

2) $log\frac{ab^2}{c} \quad : c > 0 \;\; ab^2 > 0$

$$log\frac{ab^2}{c} = logab^2 - logc = loga + logb^2 - logc$$
$$= loga + 2logb - logc$$

$$log\frac{ab^2}{c} = loga + 2logb - logc$$

3) $log\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$

$$log\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}} = log\sqrt{a}\sqrt{b} - log\sqrt{c}$$
$$= log\sqrt{a} + log\sqrt{b} - log\sqrt{c}$$
$$= loga^{0.5} + logb^{0.5} - logc^{0.5}$$
$$= 0.5loga + 0.5logb - 0.5logc$$

$$log\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}} = 0.5(loga + logb - logc)$$

4) $log\frac{ab+b}{c}$ $: c > 0 \ \ ab > 0$

$$log\frac{ab+b}{c} = log\frac{(a+1)b}{c} = \log(a+1)b - logc$$
$$= \log(a+1) + logb - logc$$

$$log\frac{ab+b}{c} = \log(a+1) + logb - logc$$

5) $\log(\frac{ab+b}{c})^2$ $: c > 0 \ \ ab > 0$

$$\log(\frac{ab+b}{c})^2 = 2\log\frac{ab+b}{c} = 2log\frac{(a+1)b}{c}$$
$$= 2\log(a+1)b - 2logc$$
$$= 2\log(a+1) + 2logb - 2logc$$

6) $log\frac{ab}{(dc)^2}$ $: dc > 0 \ \ ab > 0$

$$log\frac{ab}{(dc)^2} = logab - log(dc)^2 = loga + logb - 2logdc$$
$$= loga + logb - 2logd - 2logc$$

$$log\frac{ab}{(dc)^2} = loga + logb - 2logd - 2logc$$

Third Unit

Polynomial Function

Third Unit

Polynomial Function

(اقتران كثير الحدود)

1) Definition polynomial Function

2) Operations on Polynomials

3) The apportionment of the polynomial

4) The Remainder and Factor Theorem

5) Properties of Polynomials

6) Solving Algebraic Equation with One Variable

1) Polynomial Function

مدخل الي اقتران كثير حدود

لتكن A,B مجموعتين جزئتين من الاعداد الحقيقة (R)ولكن ماهي الاعداد الحقيقية في البداية ما هوتعريف مجموعات الاعداد

ولكن ما هي الاعداد الحقيقية وما هي مجموعة الاعداد الطبيعية والكسرية

1) مجموعة الاعداد الطبيعية (The Natural Numbers)

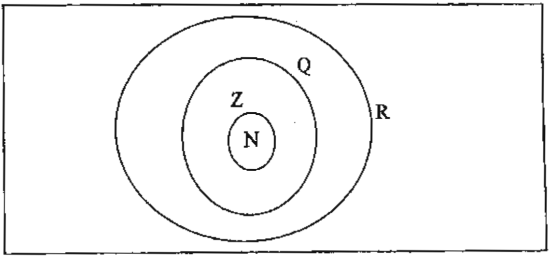
$N = \{1, 2, 3, ...\}$

2) مجموعة الاعداد الصحيحة (The Integer Numbers)

$Z = \{..., -1, 0, 1, 2, ...\}$

3)مجموعة الاعداد النسبية (The Rational Numbers)

$Q = \{\frac{a}{b} : a, b \in Z, b \neq 0\}$



من خلال هذه الشكل التوضيح والذي يوضح ان مجموعة الاعداد الطبيعية هي مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الصحيحة وكذلك مجموعة الاعداد الصحيحة مجموعة جزئية من الاعداد النسبية حيث ان كل عدد صحيح يمكن كتابته على شكل عدد نسبي

$$2 = 2 = \frac{2}{1} = \frac{-2}{-1}$$

ملاحظة:التمثيل العشري النسبي يوجد له شكلين اما منتهي او غير منتهي

0.5,.4 .75 ,.03333.....

4) مجموعة الاعداد غير النسبية ويرمز لها بالرمز (I) وهي تحتوي على الاعداد غير الدورية وغير المنتهية على سبيل المثال

$$\pi, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt{3}$$

5) مجموعة الاعداد الحقيقة (R) وتمثل اتحاد بين مجموعة الاعداد النسبية ومجموعة الاعداد غير النسبية

بعد ان تم تعريف على مجموعات الاعداد نرجع للموضوع الاساسي

لتكن A,B مجموعتين جزئتين من الاعداد الحقيقة (R) فان حاصل الضرب الديكارتي بين AB ويرمز له بالرمز $A \times B$ ويعرف كالاتي

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

المسقط الأول المسقط الثاني

اي مجوعة جزئية من $A \times B$ تسمى علاقة

مجموعة المساقط الاولى تسمى ب مجال(domain) العلاقة اما مجموعة المساقط الثانية تسمى ب المدى (range)

مجال الاقتران (Domain)

هو جميع قيم X التي تكون عندها f موجوده

مدى الاقتران (Range)

تسمى مجموعة الصور للقيم x تحت تاثير f بالمدى

مثال

$$1)\ R_1 = \{\ (1\ ,2), (1{,}3)\ , (2{,}4)\}$$

علاقة ولكن ليست اقتران لاحظ عندما x=1 يوجد لها صورتين 3 و 2 مما تناقض مع تعريف الاقتران والذي ينص عل ان كل عنصر بالمجال له صورة واحده في المدى

$$2)\ R_2 = \{\ (x, y)\ \in R^2 : y = x\ \}$$

اقتران لاحظ كل عنصر بالمجال له صورة واحده في المدى لا يوجد قيمتين لـ X لهما نفس الصورة

وللتاكد خذ اي قيمة ل X وجد صورتها Y في المعادلة و ستجد ان له صورة واحدة فقط

مثال

$$f(x) = 3x^2 - 5$$

اوجد:

1) $f(0)$ 2) $f(-2)$

3) $f(\sqrt{7})$ 4) $f(\sqrt[3]{3})$

1) $f(0) = 3(0)^2 - 5 = -5 = -5$

2) $f(-2) = 3(-2)^2 - 5 = 3(4) - 5 = 12 - 5 = 7$

3) $f(\sqrt{7}) = 3(\sqrt{7})^2 - 4 = 3(7) - 5 = 21 - 5 = 16$

4) $f(\sqrt[3]{3}) = 3(\sqrt[3]{3})^2 - 4 = 3(3)^{\frac{2}{3}} - 5 = 3 \times 3(3)^{\frac{1}{3}} - 5 = 9(3)^{\frac{1}{3}} - 5$

مثال

اذا كان

$$h(x) = \frac{1}{x^3+12}$$

$h(\sqrt[3]{15}), h(\sqrt[3]{12}), h(3), h(\sqrt[2]{3})$ اوجد

$$h(\sqrt[3]{15}) = \frac{1}{(\sqrt[3]{15})^3+12} = \frac{1}{(15)^{\frac{3}{3}}+12} = \frac{1}{15+12} = \frac{1}{27}$$

$$h(\sqrt[3]{12}) = \frac{1}{(\sqrt[3]{12})^3+12} = \frac{1}{(12)^{\frac{3}{3}}+12} = \frac{1}{12+12} = \frac{1}{24}$$

$$h(3) = \frac{1}{(3)^3+12} = \frac{1}{(3*3*3)+12} = \frac{1}{27+12} = \frac{1}{39}$$

$$h(\sqrt[2]{3}) = \frac{1}{(\sqrt[2]{3})^3+12} = \frac{1}{(3)^{\frac{3}{2}}+12} = \frac{1}{3\sqrt[2]{3}+12}$$

2) Definition polynomial Function

(تعريف اقتران كثير الحدود)

ليكن

$$p(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$$

Where

$n \in N$

$a_n\, , a_{n-1}\, , \ldots\ldots, a_1\, , a_0\ \in R$

بتالي فانp يسمى اقتران كثير حدود من الدرجة n

مثال:

1) $f(x) = 5$

كثيرحدود من الدرجه الصفرية ويسمى هذا الاقتران بالاقتران الثابت

2) $f(x) = 7x - 2$

كثيرحدود من الدرجه الاولى ويسمى ايضا بالاقتران الخطي

3) $f(x) = 3x^2 + 9$

كثيرحدود من الدرجه الثانية ويسمى بالاقتران التربيعي

$$4)\ f(x) = x^{\frac{1}{2}} + 6$$

ليس كثيرحدود لاحظ الاس لا ينتمي للاعداد الطبيعية

ملاحظة

اذا كان $f(x)$ كثير حدود بتالي فان مجاله الاعداد الحقيقيةR

مثال

اوجد مجال ومدى الاقترانات التالية:

$$1)f(x) = x + 1$$

نلاحظ ان f معرف عند كل القيم بالتالي المجال هو

$$R$$

لايجاد المدى

$$y = x + 1 \rightarrow y - 1 = x$$

بالتالي فان المدى هو

$$\mathrm{R}$$

$$2)f(x) = \frac{1}{x}$$

نلاحظ ان f معرف عند كل القيم بالتالي المجال هو

$$R - \{0\}$$

لايجاد المدى

$$y = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{y}$$

بالتالي فان المدى هو

$$R - \{0\}$$

$3)\ t(x) = \frac{1}{x-1}$

لاحظ ان t معرف عند كل القيم بالتالي المجال هو

$$R - \{1\}$$

لايجاد المدى

$$y = \frac{1}{x-1} \rightarrow x = \frac{1}{y} + 1$$

بالتالي فان المدى هو

$$R - \{0\}$$

$4) z(x) = \frac{1}{x^2-1}$

لاحظ ان Z معرف عند كل القيم المجال ما عدا اصفار المقام ولايجادها

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$$

x=1,-1

هو

$$R - \{-1,1\}$$

لايجاد المدى

بالتالي فان المدى هو

$R - \{0\}$

5) $k(x) = 2 + \sqrt{x - 1}$

مجال الاقتران هو كل الاعداد الحقيقة باستثناء الاعداد التي تجعل من المقدار (x-1) سالبا وهي كل الاعداد التي تقع ضمن الفترة $(-\infty,\ 1)$

لايجاد المدى

لايجاد المدى لاحظ ان قيمة $\sqrt{x - 1}$ تتغير على الفترة $(0, \infty)$ بتالي فان $k(x)$ تتغير على الفترة $[2, \infty)$

6) $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

مجال الاقتران هو كل الاعداد الحقيقة باستثناء الاعداد التي تجعل من المقدار $(x^2 - 4)$ سالبا وهي كل الاعداد التي تقع ضمن الفترة

$(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

موضحا كالاتي:

$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \mp 2$



اما المدى

$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$

لاحظ عندما تقع x ضمن الفترة $[2, \infty)$ فان y تقع في هذه الحالة ضمن

نفس الشئ بالنسبة للفترة الثانية ل x

بتالي فان المدى هو

$$[0, \infty)$$

بشكل عام لايجاد مجال الاقتران الجذري $f(x) = \sqrt{g(x)}$ يجب حل المتباينة التالية:

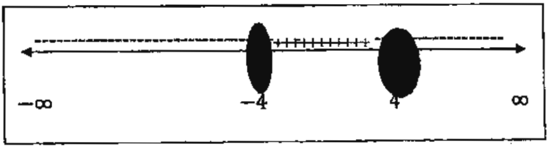
$$g(x) \geq 0$$

7) $h(x) = \sqrt{16 - x^2}$

مجال الاقتران هو كل الاعداد الحقيقة باستثناء الاعداد التي تجعل من المقدار $(x^2 - 4)$ سالبا وهي كل الاعداد التي تقع ضمن الفترة بمعنى ان

$$g(x) = 16 - x^2 \geq 0$$

$$16 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \mp 4$$



اما المدى

$y = \sqrt{16 - x^2}$

لاحظ عندما تقع x ضمن الفترة $[-4,4]$

فان y تقع في هذه الحالة ضمن $[0, \infty)$

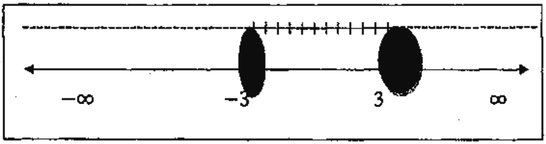
بتالي فان المدى هو $[0, \infty)$

$$8)\ f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

مجال الاقتران هو كل الاعداد الحقيقة باستثناء الاعداد التي تجعل من المقدار $(x^2 - 9)$ سالبا وهي كل الاعداد التي تقع ضمن الفترة بمعنى ان

$$g(x) = x^2 - 9 \geq 0$$

$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \mp 3$$



$[-3,3]$

اما المدى

$$y = \sqrt{x^2 - 9}$$

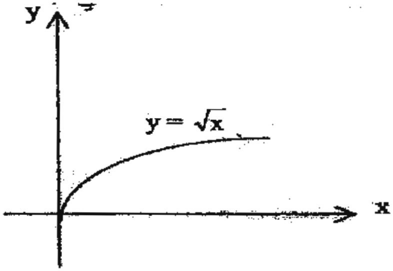
لاحظ عندما تقع x ضمن الفترة $[-3,3]$ فان y تقع في هذه الحالة ضمن

$[0, \infty)$

بتالي فان المدى هو

$$[0,\infty)$$

سؤال لماذا دائما مدى الاقتران الجدزي هو $[0,\infty)$ للاجابة عن هذا السؤال انظر الى شكل الاقتران الجذري في المستوى الديكارتي:



3) العمليات على الاقترانات (Operations on Polynomials)

$1)(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$

$2)(f.g)(x)=f(x)g(x)$

$3)\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ *with conditional* $g(x)\neq 0$

ملاحظات:

1) مجال $(f\pm)(x)$ هو عبارة عن مجال f تقاطع مجال g

2) مجال $(.g)(x)$ هو عبارة عن مجال f تقاطع مجال g

3) مجال $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ هو عبارة عن مجال fبالكامل تقاطع مجال g بالكامل باستثناء اصفار g وتكتب رياضياً بالصيغة التالية:

$domain\ f\ \cap domain\ g - \{x \in R: g(x) = 0\}$

مثال

اذا كان

$f(x) = 3 + x$

$g(x) = x - 3$

اوجد

$1)(f + g)(x)$

$2)(f - g)(x)$

$3)(f.g)(x)$

$4)\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$5)(2f + 3g)(x)$

$1)(f + g)(x) = 3 + x + x - 3 = 2x$

$2)(f - g)(x) = 3 + x - x + 3 = 6$

$3)(f.g)(x) = (3 + x)(x - 3) = x^2 - 9$

$4)\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3+x}{x-3} \quad x \neq 3$

$5)\ (2f + 3g)(x) = 2(3 + x) + 3(x - 3) = 6 + 2x + 3x - 9$

$= 5x - 3$

مثال

اذا كان

$t(x) = x^2 - 5$

$g(x) = x^3 - 1$

اوجد

1) $(t + g)(x)$

2) $(t - g)(x)$

3) $(t.g)(x)$

4) $\left(\frac{t}{g}\right)(x)$

5) $(4t + 6g)(x)$

1) $(t + g)(x) = x^2 - 5 + x^3 - 1 = x^3 + x^2 - 6$

2) $(t - g)(x) = x^2 - 5 - x^3 + 1 = -x^3 + x^2 - 4$

3) $(t.g)(x) = (x^2 - 5)(x^3 - 1) = x^5 - x^2 - 5x^3 + 5$

4) $\left(\frac{t}{g}\right)(x) = \frac{x^2-5}{x^3-1} \quad x \neq 1$

5) $(4t + 6g)(x) = 4(x^2 - 5) + 6(x^3 - 1) = 4x^2 - 20 + 6x^3 - 6$

$= 6x^3 + 4x^2 - 26$

مثال

اذا كان

$l(x) = x^3 + 1$

$r(x) = x^3 + x^2 + 1$

اوجد

$1)(l + r)(x)$

$2)(l - r)(x)$

$3)(l.r)(x)$

$4)\left(\frac{l}{g}\right)(x)$

$5)(3l + 4r)(x)$

$1)(l + r)(x) = x^3 + 1 + x^3 + x^2 + 1 = 2x^3 + x^2 + 2$

$2)(l - r)(x) = x^3 + 1 - x^3 - x^2 - 1 = -x^2$

$3)(l.r)(x) = (x^3 + 1)(x^3 + x^2 + 1)$

$= x^6 - x^5 + x^3 + x^3 + x^2 + 1$

$= x^6 - x^5 + x^3 + x^3 + x^2 + 1$

$4)\left(\frac{l}{r}\right)(x) = \frac{x^3+1}{x^3+x^2+1} \quad x \neq 3$

$5)(3l + 4r)(x) = 3(x^3 + 1) + 4(x^3 + x^2 + 1) = 3x^3 +$

$3 + 4x^3 + 4x^2 + 4$

$= 7x^3 + 4x^2 + 7$

تركيب الاقترانات

$(fog)(x) = f(g(x))$

وتقرا f بعد g

$(gof)(x) = g(f(x))$

وتقرا g بعد f

مثال

$f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = x - 2$

اوجد كل من

$(f \circ g)(x)$

$(g \circ f)(x).$

واوجد المجال لكل منهما

1) $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x - 2) = \sqrt{x - 2}$

بما ان f اقتران جذري بتالي فان مجال الاقتران قيم X التي هي اكبر من صفر $(x \geq 0)$ مجال(fog) هو $x-2 \geq 0$ بتالي مجاله $x \geq 2$

$$2)(gof)(x)= g\left(f(x)\right) = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{x} - 2$$

بتالي مجال (gof) هو $x \geq 0$ ويمكن التعبير عنها ايضا بهذه الصيغة

$$\{IR: x \geq 0\}$$

4)The apportionment of the polynomial

(قسمة كثيرات الحدود)

اذا كان f(x)and h(x) اقترانين كثيري حدود بحيث $h(x) \neq 0$ فان

$$\left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$$

There are 2 unique function like k&r such that

كما يوجد اقترانين كثيري حدود وحيدان مثل K,R بحيث

$$f(x) = h(x).k(x) + r(x) where \ \ degree \ of \ h(x) > degree \ of \ r(x) > 0$$

يسمي $k(x)$ باقي القسمة و $r(x)$ بناتج القسمة

ويوجد طريقتين لاجراء القسمة :

أ- القسمة التركيبية

2- القسمة الطويلة

مثال

جد ناتج وباقي قسمة $f(x) = x^3 - 2x + 1$ على $h(x) = x - 2$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2x + 2 & \\ \hline x^3 - 2x + 1 & x - 2 \end{array}$$

$-$

$x^3 - 2x^2$

$2x^2 - 2x + 1$

$-$

$2x^2 - 4x$

$2x + 1$

$-$

$2x - 4$

5

تلخيص للخطوات

1) رتب حدود المقسوم والمقسوم عليه تنازليا

2) قسمة الحد الاول في المقسوم على الحد الاول في المقسوم عليه

3) ضرب المقسوم عليه بما حصلنا عليه في 2 وطرحنا الناتج

4) كرر الخطوتين 2 3 حتى وصلنا لباقي درجته اقل من درجة المقسوم عليه

بالتالي فان ناتج

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{x^3 - 2x + 1}{x - 2} = x^2 - 2x + 1 + \frac{5}{x - 2}$$

لاحظ الاس الذي نتج معنا عن القسمة ال يمثل $x^2 = \frac{x^3}{x}$ ماذا يعني ذلك؟

يعني اننا اذا اردنا معرفة درجة كثير الحدود الذي ينتج عن القسمة فاننا ناخذ

$$\frac{\text{اكبر اس في المقسوم}}{\text{اكبر اس في المقسوم عليه}}$$

ملاحظة: من المهم جدا ترتيب الحدود من الاكبر الى الاصغر عند اجراء القسمة

مثال

جد ناتج وباقي قسمة $f(x) = x^7 + 1$ على $h(x) = x^3 + 1$

$$x^4 - x$$

$$x^7 + 1 \;\Big|\; x^3 + 1$$

$-$

$x^7 + x^4$

$x^4 + 1$

$-$

$x^4 + 1$

0

تلخيص للخطوات

1) رتب حدود المقسوم والمقسوم عليه تنازليا
2) قسمة الحد الاول في المقسوم على الحد الاول في المقسوم عليه
3) ضرب المقسوم عليه بما حصلنا عليه في 2 وطرحنا الناتج
4) كرر الخطوتين 2 3 حتى وصلنا لباقي درجته اقل من درجة المقسوم عليه

بالتالي فان ناتج

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{x^7+1}{x^3+1} = x^4 - x$$

مثال

جد ناتج وباقي قسمة $f(x) = x^6 + 5x^4 + x + 5$ على $h(x) =$
$x^4 + 1$

$$x^2 + 5$$

$$x^6 + 5x^4 + x + 5 \quad \big| \quad x^4 + 1$$

$-$

$x^6 + x^2$

$5x^4 + x^2 + 4x + 5$

$-$

$5x^4 + 5$

$x^2 + 4x$

تدريب:

جد ناتج وباقي قسمة $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ على $h(x) =$
$x - 2$

الجواب

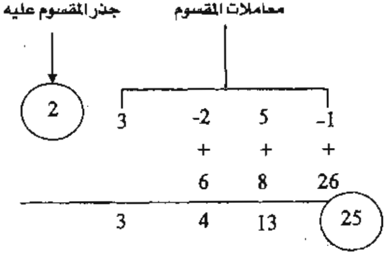
$$\frac{f(x)}{h(x)}=\frac{3x^3-2x^2+5x-1}{x-2}= 3x^2+4x+13+\frac{25}{x-2}$$

القسمة التركيبية

مثال

جد ناتج وباقي قسمة $f(x)=3x^3-2x^2+5x-1$ على $h(x)=$
$x-2$

نعيد كتابة $x-2$ ليصبح x=2



$$\frac{f(x)}{h(x)}=\frac{x^3-2x^2+5x-1}{x-2}=3x^2+4x+13+\frac{25}{x-2}$$

تلخيص للخطوات

1) رتب حدود المقسوم والمقسوم عليه تنازليا

2) اعد كتابة المقسوم عليه ليصبح x=a

3) ضع معامل الحد الاول واضرب بالعدد 2 كتبنا الناتج تحت المعامل الثاني ثم جمعنا

4) كرر عملية الضرب والجمع الى اخر معامل فتكون الاعداد الثلاثة هي معاملات حدود ناتج القسمة واخر عدد هو الباقي

مثال

جد ناتج وباقي قسمة $f(x) = x^4 - 10x^2 + 2x + 3$ على $h(x) = x - 3$

تعيد كتابة $x - 2$ ليصبح x=2

جذر المقسوم عليه	معاملات المقسوم				
3	1	0	-10	2	3
		+	+	+	+
		3	9	-3	-3
	1	3	-1	-1	0

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{x^4-10x^2+2x+3}{x-3} = x^3+3x^2 - x - 1$$

تلخيص للخطوات

1) رتب حدود المقسوم والمقسوم عليه تنازليا
2) اعد كتابة المقسوم عليه ليصبح x=a
3) ضع معامل الحد الاول وضربناه بالعدد 2 كتبنا الناتج تحت المعامل الثاني ثم جمعنا
4) كرر عملية الضرب والجمع الى اخر معامل فستكون الاعداد الثلاثة هي معاملات حدود ناتج القسمة واخر عدد هو الباقي ولاحظ ان الباقي يساوي صفر

تدريب

جد ناتج وباقي قسمة $f(x) = x^3 - 2x + 1$ على $h(x) = x - 2$ باستخدام القسمة التركيبية

الجواب

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{x^3-2x^2+5x-1}{x-2} = 3x^2 + 4x + 13 + \frac{25}{x-2}$$

The Remainder and Factor Theorem (نظرية العوامل)

(x-a) عامل من عوامل كثير الحدود اذا وفقط اذا كان $f(a) = 0$

مثال

اذا كان

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$$

$$h(x) = x - 3$$

بين ان $h(x)$ عامل من عوامل $f(x)$

العدد 3 هو صفر الاقتران $h(x)$ بتالي نعوض قيمته في f

$$f(x) = (3)^3 - 3(3)^2 + 3 - 3 = 0$$

حسب نظرية العوامل فان $h(x)$ عامل من عوامل $f(x)$

مثال

اذا كان

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$h(x) = x - 1$$

بين ان $h(x)$ عامل من عوامل $f(x)$

العدد 1 هو صفر الاقتران $h(x)$ بتالي نعوض قيمته في f

$$f(x) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$$

حسب نظرية العوامل فان $h(x)$ عامل من عوامل $f(x)$

مثال

حلل المقدار

$$f(x) = x^3 - 1$$

الى عوامله الاولية

$$f(x) = x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

تسمى هذه الطريقة بالتحليل بفرق المكعبين ولكن ماهي طريقة الفرق بين مكعبين

نعود للمثال

اذا لدينا عامل واحد هو

$$h(x) = x - 1$$

مثال

حلل المقدار

$$f(x) = x^3 - 8$$

الى عوامله الاولية

$$f(x) = x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

اذا يوجد عامل واحد هو

$$h(x) = x - 2$$

لماذا عامل واحد فقط لاحظ المقدار

$$x^2 + 2x + 4$$

بحساب المميز

a=1 b=2 c=4

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12$$

بالتالي المميز سالب وهذا يعني ان المقدار لا يوجد له اصفار (عوامل وسيتم الحديث عن المميز وقواعده لاحقا بالتفصيل

مثال

حلل المقدار

$$f(x) = x^3 + 27$$

الى عوامله الاولية

$$f(x) = x^3 + 27 = (x+3)(x^2 + 3x + 9)$$

اذا لدينا عامل واحد هو

$$h(x) = x - 3$$

نفس السؤال السابق لماذا عامل واحد فقط لاحظ المقدار

$$x^2 + 3x + 9$$

بحساب المميز

a=1 b=3 c=9

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(1)(9) = 9 - 36 = -27$$

بالتالي المميز سالب وهذا يعني ان المقدار لا يوجد له اصفار (عوامل)

ملاحظه العوامل الاولية لاقترانات كثيرات الحدود اما ان تكون خطية او تربيعية مميزها سالب ولكن ما هو المميز

بداية المعادلة التربيعية تكون بالصيغة التالية

$$ax^2 + bx + c$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac$$

وله ثلاث حالات

اما اكبر من صفر (موجب) وفي هذه الحالة لدينا صفرين حقيقين

يساوي صفر بمعنى ان لدينا صفر واحد

اصغر من صفر (سالب) لا يوجد اصفار

وسناخذ 3 امثلة توضح ذلك

القاعدة العامة لحل اي معادله تربيعية

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\text{المميز}}}{2a}$$

مثال

اوجد اصفار الاقتران f(x)

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

a=1 b=-3 c=2

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1$$

المميز اكبر من صفر(موجب) وفي هذه الحالة لدينا صفرين حقيقين

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$x = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ or $x = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

بالتالي

x=2 or x=1

$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$$

للتاكد من صحة الحل

$$(x-2)(x-1) = x^2 - x - 2x + 2 = x^2 - 3x + 2$$

مثال

أوجد اصفار الاقتران f(x)

$$f(x) = x^2 + 4x + 4$$

a=1 b=-3 c=2

المميز $= b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$

المميز يساوي صفر (موجب) وفي هذه الحالة لدينا صفر حقيقي واحد فقط

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(4) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{-4 \pm 0}{2(1)} = \frac{-4}{2} = -2$$

$x = -2$

بالتالي

x=-2

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x + 2)$$

للتاكد من صحة الحل

$$(x + 2)(x + 2) = x^2 + 2x + 2x + 4 = x^2 + 4x + 4$$

مثال

اوجد اصفار الاقتران f(x)

$$f(x) = x^2 - 3x + 5$$

a=1 b=-3 c=5

المميز $= b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(5) = 9 - 20 = -11$

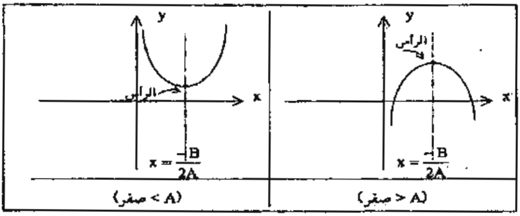
المميز اصغر من صفر (سالب) وفي هذه الحالة ليس لدينا اصفار

بمعنى ان المعادله غير قابلة للتحليل

Properties of Polynomials (خواص كثيرات الحدود)

الصورة العامة للاقتران التربيعي:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



محور التماثل للقطع المكافئ يعطى بالعلاقة التالية

$$x = -\frac{B}{2A}$$

وتسمى النقطه التي يتقاطع فيها محور التماثل للقطع المكافئ مع منحنى القطع بالراس وتعطى احداثياتها بالعلاقة التالية

$$\left(-\frac{B}{2A} \ , \ f\left(-\frac{B}{2A}\right)\right)$$

يكون راس القطع المكافئ مفتوح للاعلى اذا كانت $A > 0$ ويكون للمنحنى قيمة صغرى هي $f\left(-\frac{B}{2A}\right)$

يكون راس القطع المكافئ مفتوح للاسفل اذا كانت $A < 0$ ويكون للمنحنى قيمة عظمى هي $f\left(-\frac{B}{2A}\right)$

1) $y = -x^2 + 4x - 5$

$A = -1$

$B = 4$

$C = -7$

معادلة محور التماثل:

$$x = -\frac{B}{2A} = -\frac{4}{(2)(-1)} = -(-2) = 2$$

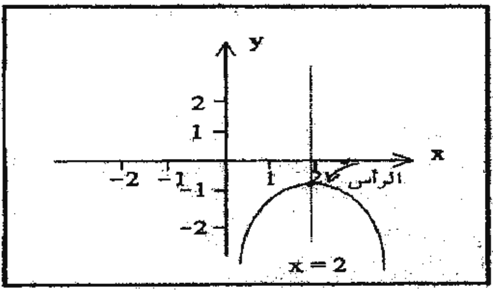
$$f\left(-\frac{B}{2A}\right) = f(2) = -(2^2) + 4(2) - 7 = -4 + 8 - 5 = -1$$

احداثيات الراس

(2,-1)

A=1<0

بتالي القطع مفتوح للاسفل



2) $y = x^2 + 2$

$A = 1$

$B = 0$

$C = 2$

معادلة محور التماثل:

$$x = -\frac{B}{2A} = -\frac{0}{2(1)} = 0$$

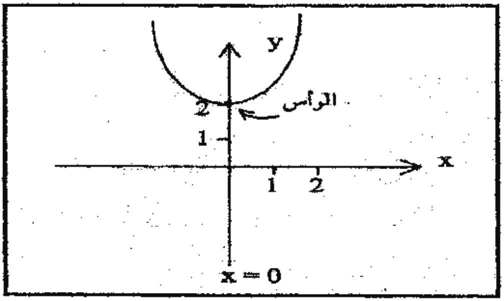
$$f(0) = 0 + 2 = 2$$

احداثيات الراس

$$(0,2)$$

A=1>0

بتالي القطع مفتوح للاعلى



1) $y = x^2 - 2x - 1$

$A = 1$

$B = -2$

$C = -1$

معادلة محور التماثل:

$x = -\frac{B}{2A} = -\frac{-2}{2(1)} = 1$

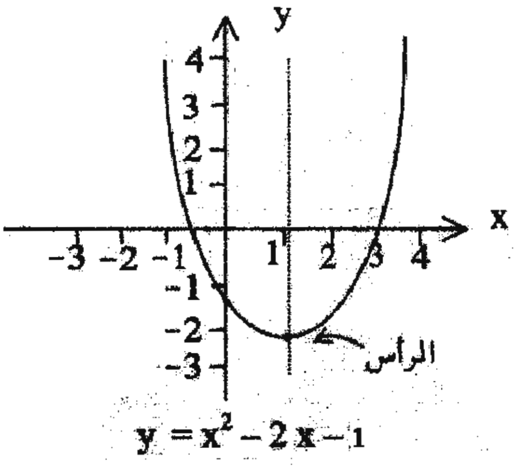
$f(1) = 1 - 2 - 1 = -2$

احداثيات الراس

(1,-2)

A=1>0

بتالي القطع مفتوح للاعلى



- Solving Algebraic Equation with One Variable

حل المعادلات الجبرية بمتغير واحد

المعادلات ذات المتغير الواحد عبارة عن ثلاث انواع

1) المعادلة الخطية وتكون على صورة

$$ax + b = 0$$

ويكون حل المعادلة

$$ax + b = 0 \rightarrow ax = b \rightarrow x = \frac{b}{a}$$

مثال

اوجد حل المعادلة

$$4x + 5 = 0$$

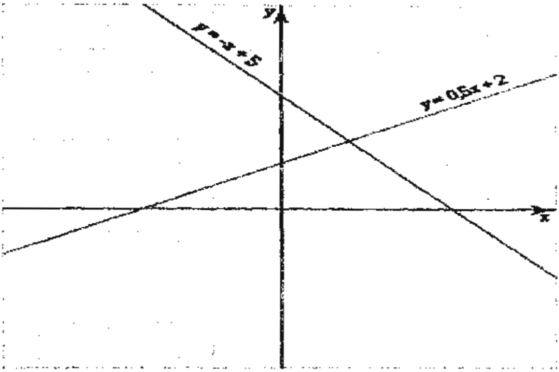
$$4x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{4}$$

ولتوضيح شكل الاقتران الخطي في المستوى الديكارتي

ارسم الاقتران التالي

$1) y = -x + 5$

$2) y = \frac{1}{2}x + 2$



لاحظ شكل الاقتران عبارة عن خط مستقيم ومن هذا الشكل جاء مسمى اقتران خطي

2) المعادلة التربيعية وتكون على صورة

$ax^2 + bx + c$

المميز $= b^2 - 4ac$

ولها ثلاث حالات كما ذكر سابقا وهي:

1) اما اكبر من صفر(موجب) وفي هذه الحالة لدينا حلين للمعادله

2) يساوي صفر بمعنى ان لدينا حل واحد فقط

3) اصغر من صفر(سالب) لا يوجد حل للمعادلة

وسيوضح ذلك من خلال امثلة بالاضافة الى الامثلة الثلاث التي تم ذكرها سابقا لتوضيح مفهوم المميز وتحليل العبارة التربيعة ولتوضيح كيف ان تحليل الاقتران التكعيبي ينتج عنه مقدارين الاول من الدرجة الخطية والثانية عبارة تربيعية غير قابلة للتحليل وتم اثبات ذلك بالاعتماد على القانون العام لتحليل العبارة التربيعية (اسلوب المميز)

لتذكير فقط القاعدة العامة لحل اي معادله تربيعية

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\text{المميز}}}{2a}$$

مثال

اوجد حل المعادله

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

a=1 b=-4 c=3

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$$

المميز اكبر من صفر(موجب) وفي هذه الحالة لدينا حلين للمعادله

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{4 \pm 2}{2(1)} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{or} \quad x = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

بالتالي

x=3 or x=1

$$x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$$

للتاكد من صحة الحل

$$(x-3)(x-1) = x^2 - x - 3x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

مثال

اوجد حل المعادله

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

a=1 b=-5 c=4

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(4)(1) = 25 - 16 = 9$$

المميز اكبر من صفر (موجب) وفي هذه الحالة لدينا حلين للمعادله

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2(1)} = \frac{5 \pm 3}{2(1)} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{or} \quad x = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

بالتالي

x=1or x=4

$$x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$$

للتاكد من صحة الحل

$$(x-4)(x-1) = x^2 - x - 4x + 4 = x^2 - 5x + 4$$

مثال

اوجد حل المعادله

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

a=1　　　　b=-3　　　　c=2

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$$

المميز يساوي صفر (موجب) وفي هذه الحالة لدينا حل واحد فقط

$$\mathrm{x} = \frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}} = \frac{-(2) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{-2 \pm 0}{2(1)} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\mathrm{x} = -1$$

بالتالي

x=-1

للتاكد من صحة الحل

$$(x+1)(x+1) = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

مثال

اوجد حل المعادله

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

a=1　　　　*b=-6*　　　　*c=9*

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$$

المميز يساوي صفر (موجب) وفي هذه الحالة لدينا حل واحد فقط

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{6 \pm 0}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x = 3$$

بالتالي

$x=3$

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)(x-3)$$

للتاكد من صحة الحل

$$(x-3)(x-3) = x^2 - 3x - 3x + 9 = x^2 - 6x + 9$$

مثال

اوجد حل المعادلة

$$x^2 - 4x + 7 = 0$$

$a=1$ $b=-4$ $c=7$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(7) = 16 - 28 = -12$$

المميز اصغر من صفر (سالب) بمعنى ان لا يوجد حل للمعادله

مثال

اوجد حل المعادلة

$$-2x^2 + 6x + 9 = 0$$

a=1 b=6 c=-9

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(-2)(-9) = 36 - 72 = -36$$

المميز اصغر من صفر (سالب) بمعنى انه لا يوجد حل للمعادله

3) المعادلة من الدرجة الثالثة فما فوق وتكون على صورة

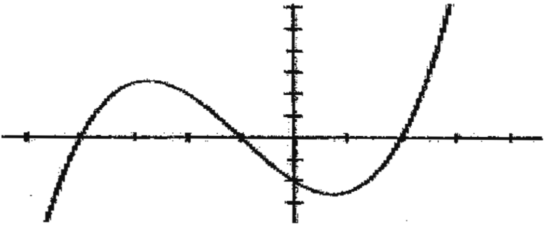
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

يستخدم ما يسمى بالتحليل الى العوامل وسيوضح من خلال بالامثلة

ملاحظة شكل الاقتران التكعيبي

تذكير المعادلة التكعيبية تكون على الشكل التالي:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$



مخطط الدالة التكعيبية جذور الدالة هي عند تقاطع المخطط مع محور x

مثال

اوجد حل المعادلة

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$$

الخطوة الاولى:

خذ الحد الثابت وحلل ذلك الحد الى عوامله الاولية

6

1,-1

2,-2

3,-3

6,-6

كل هذه الارقام هي اصفار متوقعة ولكن لمعرفة اي منها يجعل المعادلة تساوي صفر نقوم بالتعويض كالتالي

$$1)1^3 + 6(1)^2 + 11(1) + 6 = 24$$

$$2)-1^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6 = -1 + 6 - 11 + 6 = \boxed{0}$$

$$3)2^3 + 6(2)^2 + 11(2) + 6 = 8 + 24 + 22 + 6 = 60$$

$$4)-2^3 + 6(-2)^2 + 11(-2) + 6 = -8 + 24 - 22 + 6 = \boxed{0}$$

$$5)3^3 + 6(3)^2 + 11(3) + 6 = 27 + 54 + 33 + 6 = 120$$

$$6)-3^3 + 6(-3)^2 + 11(-3) + 6 = -27 + 54 - 33 + 6 = \boxed{0}$$

دقق النظر يوجد ثلاثة اصفار للمعادلة يجوز اخذ اي واحد منها واجراء

القسمة التركيبية او الطويلة بمعنى يجوز التوقف عن التعويض عندايجاد اي واحد منها ولن تختلف الاجابة وسنوضح ذلك من خلال حل السؤال بالقسمة الطويلة بالاعتماد على $x=-2$ بالقسمة الطويلة وسيتم اعاده الحل عندما $x=-3$ وسيتم الحصول على نفس الاجابة

$$x=-2$$

هو صفر من اصفار المعادله نقوم بتحويله الى عامل

$$x+2$$

ونجري اما القسمة الطويلة او التركيبية

$$x^2+4x+3$$

$$x^3+6x^2+11x+6 \quad | \quad x+2$$

$$-$$

$$x^3+2x^2$$

$$4x^2+11x+6$$

$$-$$

$$4x^2+4x$$

$$8x+6$$

$$-$$

$$8x+6$$

$$0$$

$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+2)(x^2 + 4x + 3)$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

نجد المميز للمعادله التربيعية التي نتجة بعد اجراء القسمة

a=1 b=4 c=3

المميز $= b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$

المميز اكبر من صفر (موجب) وفي هذه الحالة لدينا حلين للمعادله

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(4) \pm \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{-4 \pm 2}{2(1)} = \frac{-4 \pm 2}{2}$

$x = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ or $x = \frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

بالتالي

x=-3 or x=-1

$x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$

$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+2)(x^2 + 4x + 3) = (x+2)(x+3)(x+1)$

طريقة اخرى

$x=-3$

جذر المقسوم عليه ← 3   معاملات المقسوم: 1, 6, 11, 6

(3)	1	6	11	6
		+	+	+
		-3	-9	-6
	1	3	2	(0)

$$x^3+6x^2+11x+6=(x+3)(x^2+3x+2)$$

$$x^2+3x+2=0$$

نجد المميز للمعادله التربيعية التي نتجة بعد اجراء القسمة

a=1   b=3   c=2

$$\text{المميز}=b^2-4ac=(3)^2-4(1)(2)=9-8=1$$

المميز اكبر من صفر(موجب) وفي هذه الحالة لدينا حلين للمعادله

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(3)\pm\sqrt{1}}{2(1)}=\frac{-3\pm1}{2(1)}=\frac{-3\pm1}{2}$$

$$x=\frac{-3-1}{2}=\frac{-4}{2}=-2 \quad \text{or} \quad x=\frac{-3+1}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

بالتالي

x=-2 or x=-1

$x^2 + 4x + 3 = (x+2)(x+1)$

$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+3)(x^2+3x+2) = (x+2)(x+3)(x+1)$

ملاحظة يوجد عدد من الطرق الرياضية للتعامل مع حل المعادلات بمتغير واحد من الدرجة الثالثه فما فوق ذكرنا منها طريقة تحليل العوامل ولكن هناك بعض واقول البعض وليس الكل المعادلات يمكن حلها باخراج العامل المشترك لناخذ هذا المثال

مثال

اوجد حل المعادلة التالية

$3x^4 - 48x^2 = 0$

$3x^4 + 28x^2 = 3x^2(x^2 - 16) = 0$

$3x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

$x^2 - 16 = 0$

نجد المميز للمعادله التربيعية التي نتجة

a=1 b=0 c= -16

المميز $= b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(1)(-16) = 0 + 64 = 64$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(0) \pm \sqrt{64}}{2(1)} = \frac{\pm 8}{2(1)}$$

$x = \frac{8}{2} = 4$ or $x = \frac{-8}{2} = -4$

↓ ↓

$(x-4)$ $(x+4)$

$$3x^4 + 28x^2 = x^2(x-4)(x+4)$$

مثال

اوجد حل المعادلة

$$x^3 + 7x^2 + 15x + 9$$

الخطوة الاولى:

نأخذ الحد الثابت ونحلله الى عوامله الاولية

9

1,-1

3,-3

كل هذه الارقام هي اصفار متوقعة ولكن لمعرفة اي يمنها يجعل المعادلة تساوي صفر نقوم بالتعويض كالتالي

$$1) 1^3 + 7(1)^2 + 15(1) + 9 = 32$$

$$2) -1^3 + 7(-1)^2 + 15(-1) + 9 = -1 + 7 - 15 + 9 = \boxed{0}$$

$$3) 3^3 + 7(3)^2 + 15(3) + 9 = 27 + 63 + 45 + 9 = 144$$

$4) -3^3 + 7(-3)^2 + 15(-3) + 9 = -27 + 63 - 45 + 9 = \boxed{0}$

دقق النظر يوجد صفرين للمعادلة يجوز اخذ اي واحد منها واجراء القسمة التركيبية او الطويلة بمعنى يجوز ان نتوقف عن التعويض عند ايجاد اي واحد منها ولن تختلف الاجابة وسنوضح ذلك من خلال حل السؤال بالقسمة الطويلة بالاعتماد على $x=-3$ بالقسمة الطويلة وسنعيد الحل عندما $x=-1$ وستجد بالنهاية نفس الاجابة

$x=-3$

هو صفر من اصفار المعادله حويله الى عامل

$x+3$

ونجري اما القسمة الطويلة او التركيبية

$$x^2 + 4x + 3$$

$$x + 3 \,\overline{)\, x^3 + 7x^2 + 15x + 9}$$

$$- \quad x^3 + 3x^2$$

$$4x^2 + 15x + 9$$

$$- \quad 4x^2 + 12x$$

$$3x + 9$$

$$- \quad 3x + 9$$

$$0$$

$$x^3 + 7x^2 + 15x + 9 = (x+3)(x^2 + 4x + 3)$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

نوجد المميز للمعادله التربيعية التي نتجة بعد اجراء القسمة

a=1 b=4 c=3

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(4)(1) = 25 - 16 = 9$$

المميز اكبر من صفر(موجب) وفي هذه الحالة لدينا حلين للمعادله

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2(1)} = \frac{5 \pm 3}{2(1)} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \qquad \text{or} \qquad x = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

بالتالي

x=1or x=4

$$x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$$

للتاكد من صحة الحل

$$(x-4)(x-1) = x^2 - x - 4x + 4 = x^2 - 5x + 4$$

مثال

اوجد حل المعادله

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

a=1 b=-3 c=2

المميز $= b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$

المميز يساوي صفر (موجب) وفي هذه الحالة يوجد حل واحد فقط

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(2)\pm\sqrt{0}}{2(1)} = \frac{-2\pm0}{2(1)} = \frac{-2}{2} = -1$$

$x = -1$

بالتالي

$x=-1$

$x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x+1)$

للتاكد من صحة الحل

$(x+1)(x+1) = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$

مثال

اوجد حل المعادله

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$a=1$ $b=-6$ $c=9$

المميز $= b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$

المميز يساوي صفر (موجب) وفي هذه الحالة يوجد حل واحد فقط

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-6)\pm\sqrt{0}}{2(1)} = \frac{6\pm0}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

$x = 3$

بالتالي

x=3

$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3)$

للتاكد من صحة الحل

$(x - 3)(x - 3) = x^2 - 3x - 3x + 9 = x^2 - 6x + 9$

مثال

اوجد حل المعادلة

$x^2 - 4x + 7 = 0$

a=1 b=-4 c=7

المميز $= b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(7) = 16 - 28 = -12$

المميز اصغر من صفر (سالب) بمعنى ان لا يوجد حل للمعادله

مثال

اوجد حل المعادلة

$-2x^2 + 6x + 9 = 0$

a=1 b=6 c=-9

المميز $= b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(-2)(-9) = 36 - 72 = -36$

المميز اصغر من صفر (سالب) بمعنى انه لا يوجد حل للمعادله

3) المعادلة من الدرجة الثالثة فما فوق وتكون على صورة

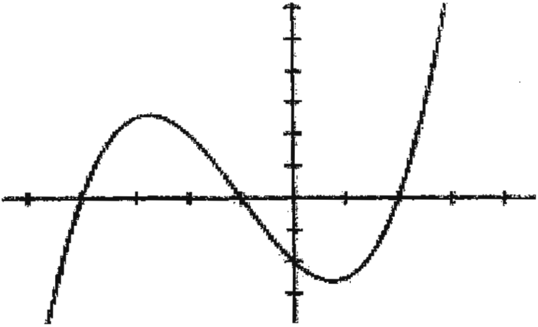
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

يستخدم ما يسمى بالتحليل الى العوامل وسيوضح من خلال بالامثلة

ملاحظة شكل الاقتران التكعيبي

تذكير المعادلة التكعيبية تكون على الشكل التالي:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$



مخطط الدالة التكعيبية جذور الدالة هي عند تقاطع المخطط مع محور x

مثال

اوجد حل المعادلة

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$$

الخطوة الاولى :خذ الحد الثابت وحلل ذلك الحد الى عوامله الاولية

6

1,-1

2,-2

3,-3

6,-6

كل هذه الارقام هي اصفار متوقعة ولكن لمعرفة اي يمنها يجعل المعادلة تساوي صفر نقوم بالتعويض كالتالي

$1)1^3 + 6(1)^2 + 11(1) + 6 = 24$

$2)-1^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6 = -1 + 6 - 11 + 6 = \boxed{0}$

$3)2^3 + 6(2)^2 + 11(2) + 6 = 8 + 24 + 22 + 6 = 60$

$4)-2^3 + 6(-2)^2 + 11(-2) + 6 = -8 + 24 - 22 + 6 = \boxed{0}$

$5)3^3 + 6(3)^2 + 11(3) + 6 = 27 + 54 + 33 + 6 = 120$

$6)-3^3 + 6(-3)^2 + 11(-3) + 6 = -27 + 54 - 33 + 6 = \boxed{0}$

دقق النظر يوجد ثلاثة اصفار للمعادلة يجوز اخذ اي واحد منها واجراء القسمة التركيبية او الطويلة بمعنى يجوز التوقف عن التعويض عند ايجاد اي واحد منها ولن تختلف الاجابة وسنوضح ذلك من خلال حل السؤال بالقسمة الطويلة بالاعتماد على $x=-2$ بالقسمة الطويلة وسيتم اعاده الحل عندما $x=-3$ وسيتم الحصول على نفس الاجابة

$x=-2$

هو صفر من اصفار المعادله نقوم بتحويله الى عامل

$$x+2$$

ونجري اما القسمة الطويلة او التركيبية

$$x^2+4x+3$$

$$x^3+6x^2+11x+6 \quad \Big| \quad x+2$$

$-$

$$x^3+2x^2$$

$$4x^2+11x+6$$

$-$

$$4x^2+4x$$

$$8x+6$$

$-$

$$8x+6$$

$$0$$

$$x^3+6x^2+11x+6=(x+2)(x^2+4x+3)$$

$$x^2+4x+3=0$$

نجد المميز للمعادله التربيعية التي نتجة بعد اجراء القسمة

a=1 b=4 c=3

$$المميز = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$$

المميز اكبر من صفر(موجب) وفي هذه الحالة لدينا حلين للمعادله

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(4) \pm \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{-4 \pm 2}{2(1)} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$x = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{or} \quad x = \frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

بالتالي

x=-3 or x=-1

$$x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$$

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+2)(x^2+4x+3) = (x+2)(x+3)(x+1)$$

طريقة اخرى

$x=-3$

جذر المقسوم عليه ← 3-

معاملات المقسوم: 1 6 11 6

جذر المقسوم عليه	معاملات المقسوم			
3-	1	6	11	6
		+	+	+
		-3	-9	-6
	1	3	2	0

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+3)(x^2 + 3x + 2)$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

نجد المميز للمعادله التربيعية التي نتجة بعد اجراء القسمة

a=1 b=3 c=2

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1$$

المميز اكبر من صفر(موجب) وفي هذه الحالة لدينا حلين للمعادله

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(3) \pm \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{-3 \pm 1}{2(1)} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad \text{or} \quad x = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

بالتالي

x=-2 or x=-1

$$x^2 + 4x + 3 = (x+2)(x+1)$$

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+3)(x^2 + 3x + 2) = (x+2)(x+3)(x+1)$$

ملاحظة يوجد عدد من الطرق الرياضية للتعامل مع حل المعادلات بمتغير واحد من الدرجة الثالثه فما فوق ذكرنا منها طريقة تحليل العوامل ولكن هناك بعض واقول البعض وليس الكل المعادلات يمكن حلها باخراج العامل المشترك لناخذ هذا المثال

مثال

اوجد حل المعادلة التالية

$$3x^4 - 48x^2 = 0$$

$$3x^4 + 28x^2 = 3x^2(x^2 - 16) = 0$$

$$3x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$x^2 - 16 = 0$$

نجد المميز للمعادله التربيعية التي نتجة

a=1 b=0 c= -16

المميز $= b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(1)(-16) = 0 + 64 = 64$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(0) \pm \sqrt{64}}{2(1)} = \frac{\pm 8}{2(1)}$$

$x = \frac{8}{2} = 4$ or $x = \frac{-8}{2} = -4$

$\downarrow$ $(x-4)$ $\qquad$ $\downarrow$ $(x+4)$

$$3x^4 + 28x^2 = x^2(x - 4)(x + 4)$$

مثال: اوجد حل المعادلة

$$x^3 + 7x^2 + 15x + 9 = 0$$

الخطوة الاولى:

ناخذ الحد الثابت ونحلله الى عوامله الاولية

9

1,-1

3,-3

كل هذه الارقام هي اصفار متوقعة ولكن لمعرفة اي يمنها يجعل المعادلة تساوي صفر نقوم بالتعويض كالتالي

$$1)\ 1^3 + 7(1)^2 + 15(1) + 9 = 32$$

$$2) -1^3 + 7(-1)^2 + 15(-1) + 9 = -1 + 7 - 15 + 9 = \boxed{0}$$

$$3) 3^3 + 7(3)^2 + 15(3) + 9 = 27 + 63 + 45 + 9 = 144$$

$$4) -3^3 + 7(-3)^2 + 15(-3) + 9 = -27 + 63 - 45 + 9 = \boxed{0}$$

دقق النظر يوجد صفرين للمعادلة يجوز اخذ اي واحد منها واجراء القسمة التركيبية او الطويلة بمعنى يجوز ان نتوقف عن التعويض عند ايجاد اي واحد منها ولن تختلف الاجابة وسنوضح ذلك من خلال حل السؤال بالقسمة الطويلة بالاعتماد على $x=-3$ بالقسمة الطويلة وسنعيد الحل عندما $x=-1$ وسنجد بالنهاية نفس الاجابة

$$x=-3$$

هو صفر من اصفار المعادله حويله الى عامل

$$x+3$$

ونجري اما القسمة الطويلة او التركيبية

$$x^2+4x+3$$

$$x^3+7x^2+15x+9 \quad \Big| \quad x+3$$

$$-$$

$$\underline{x^3+3x^2}$$

$$4x^2+15x+9$$

$$-$$

$$\underline{4x^2+12x}$$

$$3x+9$$

$$-$$

$$\underline{3x+9}$$

$$0$$

$$x^3+7x^2+15x+9=(x+3)(x^2+4x+3)$$

$$x^2+4x+3=0$$

نجد المميز للمعادله التربيعية التي نتجة بعد اجراء القسمة

a=1 b=4 c=3

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$$

المميز اكبر من صفر(موجب) وفي هذه الحالة لدينا حلين للمعادله

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(4) \pm \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{-4 \pm 2}{2(1)} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$x = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad \text{or} \qquad x = \frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

بالتالي

x=-3 or x=-1

$$x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$$

$$x^3 + 7x^2 + 15x + 9 = (x+3)(x^2 + 4x + 3) =$$

$$(x+3)(x+3)(x+1)$$

طريقة اخرى

$x=-1$

جذر المقسوم عليه — معاملات المقسوم

(-1)	1	7	15	9
	+	+	+	+
		-3	-6	-9
	1	6	9	(0)

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)(x^2+6x+9)$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

نجد المميز للمعادله التربيعية التي نتجة بعد اجراء القسمة

a=1 b=6 c=9

المميز $= b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$

المميز يساوي صفر وفي هذه الحالة لدينا حل واحد فقط للمعادله

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(6) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{-6}{2(1)} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)(x+3)(x+3)$$

مثال

اوجد حل المعادلة التالية

$$6x^5 - 54x^3 = 0$$

$$6x^5 + 28x^3 = 6x^3(x^2 - 9) = 0$$

$$6x^3 = 0 \rightarrow x^3 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$x^2 - 9 = 0$$

نجد المميز للمعادله التربيعية

a=1 b =0 c = -9

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(1)(-9) = 0 + 36 = 36$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(0) \pm \sqrt{36}}{2(1)} = \frac{\pm 6}{2(1)}$$

$x = \frac{6}{2} = 3$ or $x = \frac{-6}{2} = -3$

↓ $(x-3)$ ↓ $(x+3)$

$$3x^4 + 28x^2 = x^2(x-4)(x+4)$$

Fourth Unit Trigometric Functions

Fourth Unit Trigometric Functions

1) Angles

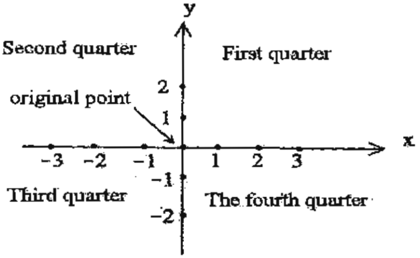
2) Sine ,Cosine ,Tangent Reciprocals

3) Values of Trigonometric functions

4) The Right Trigonometric Applications

5) Signs of trigomatric Functions Angles

بداية لا بد من التذكير بتعريف قياس الزاوية والذي هو مقدار دوران ضلع ابتدائها حتى يأخذ وضع الانتهاء فاذا كان الدوران باتجاه معاكس لعقارب الساعة كان القياس موجبا (+) واما اذا كان مع عقارب الساعة كان القياس سالبا (-) ويوجد عدة اشكال لقياس الزوايا نذكر منها القياس بالدرجات والتقدير الدائري



مثال

في اي ربع يقع ضلع الانتهاء لكل من الزوايا التالية:

-170(1

530(2

960(3

1) لاحظ ان

$$360 - 170 = 190$$

بمعنى ان الزاوية (170-) لها نفس ضلع الانتهاء لزاوية (190) وكذلك

لاحظ ايضا

$$180 < 190 < 270$$

بالتالي فان الزاوية (170-) تقع في الربع الثالث

2) لاحظ ان

$$530 - 360 = 170$$

بمعنى ان الزاوية (530) لها نفس ضلع الانتهاء لزاوية (170) وكذلك

لاحظ ايضا

$$90 < 170 < 180$$

بالتالي فان الزاوية (530) تقع في الربع الثاني

3) لاحظ ان 960

عبارة عن اكثر من دورتين

$$960 - 2 \times 360 = 960 - 720 = 240$$

بمعنى ان الزاوية (960) لها نفس ضلع الانتهاء لزاوية (240) وكذلك

لاحظ ايضا

$$180 < 240 < 270$$

بالتالي فان الزاوية (530) تقع في الربع الثالث

الراديـان (radians) هـو قيـاس زاويـة مركـزيـة تقابـل قوسـا ياسـوي وحـدة الاطوال ويرمز لـه بـالرمز (1d) ويسـمى القيـايس بالاعتمـاد علـى الراديان بالتقـدير الدائري

الزاوية 360 تكافئ 2π

مثال

حول القياسات الاتية الى التقدير الدائري

$$1)0° = 0 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{0}{180} = \pi \times 0 = 0$$

$$2)30° = 30 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{30}{180} = \pi \times \frac{1}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$3)45° = 45 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{45}{180} = \pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$4)60° = 60 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{60}{180} = \pi \times \frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$5)70° = 70 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{7}{18} = \pi \times \frac{7}{18} = \frac{7\pi}{18}$$

$$6)80° = 80 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{8}{18} = \pi \times \frac{4}{9} = \frac{4\pi}{9}$$

$$7)90° = 90 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{90}{180} = \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$8)100° = 100 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{10}{18} = \pi \times \frac{5}{9} = \frac{5\pi}{9}$$

$$9)110° = 110 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{11}{18} = \pi \times \frac{11}{18} = \frac{11\pi}{18}$$

$$10)120° = 120 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{120}{180} = \pi \times \frac{2}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$11)130° = 130 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{130}{180} = \pi \times \frac{13}{18} = \frac{13\pi}{18}$$

$$12) 150° = 150 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{150}{180} = \pi \times \frac{5}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$13) 180° = 180 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{180}{180} = \pi \times 1 = \pi$$

$$14) -225° = -225 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{-225}{180} = \pi \times \frac{-5}{4} = \frac{-5\pi}{4}$$

$$15) -90° = -90 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{-90}{180} = \pi \times \frac{-1}{2} = \frac{-\pi}{2}$$

$$16) 270° = 270 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{270}{180} = \pi \times \frac{3}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$17) 315° = 315 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{315}{180} = \pi \times \frac{7}{8} = \frac{7\pi}{8}$$

$$18) 360° = 360 \times \frac{\pi}{180} = \pi \times \frac{360}{180} = \pi \times 2 = 2\pi$$

Sine ,Cosine ,Tangent Reciprocals

تعريف اقتران الجيب (cosine) هو اقتران يربط العدد الحقيقي θ بالاحداثي y لنقطة تقاطع الزاوية التي قياسها θ مع دائرة الوحده ويرمز له بالرمز

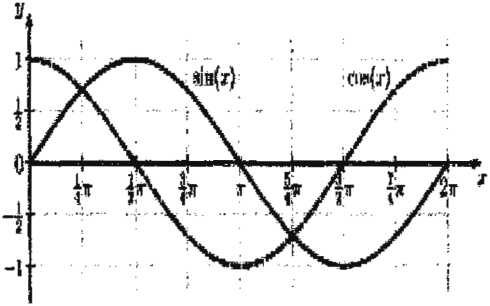
$$f(\theta) = sin\theta$$

$$-1 \leq sin\theta \leq 1$$

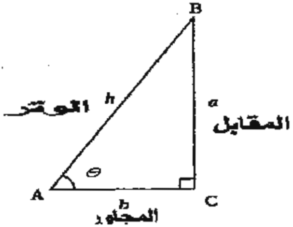
تعريف اقتران جيب التمام (cosine) هو اقتران يربط العدد الحقيقي θ بالاحداثي x لنقطة تقاطع الزاوية التي قياسها θ مع دائرة الوحده ويرمز له بالرمز

$$f(\theta) = cos\theta$$

$$-1 \leq cos\theta \leq 1$$



الشكل اعلاه يوضح شكل اقتران الجيب وجيب التمام ويوضح العلاقة بينهما



$$1) sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{h}$$

$$2) cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{h}$$

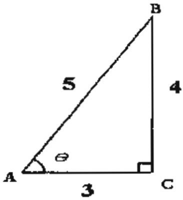
$$3) tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{a}{b}$$

$$4) cotan\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{b}{a}$$

$$5) sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{h}{b}$$

$$6) cosec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{h}{a}$$

مثال



$$1) sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{h} = \frac{4}{5}$$

$$2) cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{h} = \frac{3}{5}$$

$$3) tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{4}{3}$$

$$4) cotan\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{3}{4}$$

$$5) sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{h}{b} = \frac{5}{3}$$

$6) cosec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{h}{a} = \frac{5}{4}$

$cos0 = 1$ $\quad$ $sin0 = 0$

$cos\frac{\pi}{2} = 0$ $\quad$ $sin\frac{\pi}{2} = 1$

$cos\pi = -1$ $\quad$ $sin\pi = 0$

$cos\frac{3\pi}{2} = 0$ $\quad$ $sin\frac{3\pi}{2} = 1$

$cos2\pi = 1$ $\quad$ $sin2\pi = 0$

تذكر معادلة الدائرة لدائرة الوحدة

$$x^2 + y^2 = 1$$

ولكن ما هي معادلة الدائرة

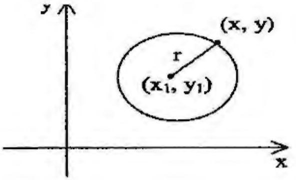
تعرف الدائرة على انها المحل الهندسي لمجموعة النقاط (x,y) في المستوى الي تبعد عن نقطة ثابتة مقدارا ثابتا تسمى النقطة الثانية بالمركز والبعد بنصف القطر

قانون المسافة بين نقطتين

$$r = \sqrt{(y - y_1)^2 + (x - x_1)^2}$$

$$r^2 = (y - y_1)^2 + (x - x_1)^2$$

هذه المعادلة تسمى بمعادلة الدائرة في الوضع القياسي حيث احداثيات المركز (x_1, y_1) ونصف القطر r



مثال: اوجد معادلة لدائرة احداثيات مركزها $(1,-2)$ وتمر بالنقطه $(4,2)$

$$r = \sqrt{(y - y_1)^2 + (x - x_1)^2}$$

$$r = \sqrt{(2 - -2)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$r^2 = (y - y_1)^2 + (x - x_1)^2$$

بتالي فان معادلة الدائرة هي

$$25 = (y + 2)^2 + (x - 1)^2$$

باستخدام معادلة الدائرة ينتج

$$cos\theta^2 + sin\theta^2 = 1$$

لاحظ ان الزاوية في

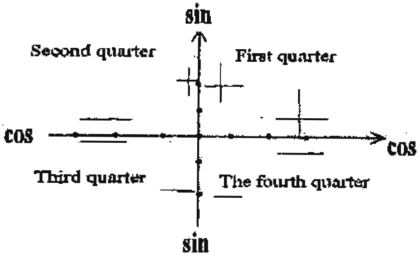
الربع الاول يكون sin موجب و cos موجب

الربع الثاني يكون sin موجب و cos سالب

الربع الثالث يكون sin سالب و cos سالب

الربع الرابع يكون sin سالب و cos موجب

كما هو موضح في الشكل ادناه



مثال

اذا كان

$$sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

اوجد $cos\theta$

باستخدام المتطابقة

$$cos\theta^2 + sin\theta^2 = 1$$

$$cos\theta^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1 \rightarrow cos\theta^2 = 1 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

بمعنى ان الزاوية تقع اما في الربع الاول او الربع الثاني

مثال

اذا كان

$$sin\theta = \frac{1}{2}$$

اوجد $cos\theta$

باستخدام المتطابقة

$cos\theta^2 + sin\theta^2 = 1$

$cos\theta^2 + (\frac{1}{2})^2 = 1 \rightarrow cos\theta^2 = 1 - (\frac{1}{2})^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

بمعنى ان الزاوية تقع اما في الربع الاول اذا كانت + او الربع الثاني

$1) tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$

$2) cotan\theta = \frac{cos\theta}{sin\theta}$

$3) sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$

$4) cosec\theta = \frac{1}{sin\theta}$

مثال

اذا كان

$$sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

اوجد, $sec\theta, cosec, cos\theta, tan\theta, cotan\theta$ علما بان الزاوية تقع في الربع الاول

باستخدام المتطابقة

$$cos\theta^2 + sin\theta^2 = 1$$

$$cos\theta^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1 \rightarrow cos\theta^2 = 1 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$cos\theta = \pm\frac{1}{2}$$

وبما الزاوية تقع اما في الربع الاول

$$cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$1) tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$2) cotan\theta = \frac{cos\theta}{sin\theta} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$3) sec\theta = \frac{1}{cos\theta} = \frac{1}{1/2} = 2$$

$$4) cosec\theta = \frac{1}{sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

مثال

اذا كان

$$cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

اوجد، $sec\theta, cosec, sin\theta, tan\theta, cotan\theta$ علما بان الزاوية تقع في الربع الرابع

باستخدام المتطابقة

$$cos\theta^2 + sin\theta^2 = 1$$

$$sin\theta^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1 \rightarrow sin\theta^2 = 1 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

وبما الزاوية تقع اما في الربع الرابع

$$sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$1) tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1$$

$$2) cotan\theta = \frac{cos\theta}{sin\theta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1$$

$$3) sec\theta = \frac{1}{cos\theta} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$4) cosec\theta = \frac{1}{sin\theta} = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}$$

مثال

اذا كان

$$sec\theta = 2$$

اوجد, $cos\theta, cosec, sin\theta, tan\theta, cotan\theta$ علما بان الزاوية تقع في الربع الاول

$$sec\theta = \frac{1}{cos\theta} = 2 \rightarrow cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$1) cos\theta = \frac{1}{2}$$

باستخدام المتطابقة

$$cos\theta^2 + sin\theta^2 = 1$$

$$sin\theta^2 + (\frac{1}{2})^2 = 1 \rightarrow sin\theta^2 = 1 - (\frac{1}{2})^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وبما الزاوية تقع اما في الربع الاول

$$2) sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3) tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$4) cotan\theta = \frac{cos\theta}{sin\theta} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$5) cosec\theta = \frac{1}{sin\theta} = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}$$

Function	0	$30 = \frac{\pi}{6}$	$45 = \frac{\pi}{4}$	$60 = \frac{\pi}{3}$	$90 = \frac{\pi}{2}$
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غير موجود
Cot	غير موجود	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
Sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	غير موجود
Csc	غير موجود	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

نظرية

1) $\cos(a-b) = cosacosb + sinasinb$

2) $\sec(a-b) = \frac{1}{\cos(a-b)} = \frac{1}{cosacosb+sinasinb}$

3) $\cos(a+b) = cosacosb - sinasinb$

4) $\sec(a+b) = \frac{1}{\cos(a+b)} = \frac{1}{cosacosb-sinasinb}$

5) $\sin(a-b) = sinacosb - cosasinb$

6) $\text{cosec}(a-b) = \frac{1}{\sin(a-b)} = \frac{1}{sinacosb-cosasinb}$

7) $\sin(a+b) = sinacosb + cosasinb$

8) $\operatorname{cosec}(a+b) = \frac{1}{\sin(a+b)} = \frac{1}{sinacosb+cosasinb}$

9) $\tan(a-b) = \frac{tana-tanb}{1+tanatanb}$

10) $\cot(a-b) = \frac{1}{\tan(a-b)} == \frac{1}{\frac{tana-tanb}{1-2tanatanb}} = \frac{1-2tanatanb}{tana-tanb}$

11) $\tan(a+b) = \frac{tana+tanb}{1-tanatanb}$

12) $\cot(a+b) = \frac{1}{\tan(a+b)} == \frac{1}{\frac{tana+tanb}{1-2tanatanb}} = \frac{1-2tanatanb}{tana+tanb}$

مثال

اذا كان

$\sin a = \frac{3}{5} \qquad \cos b = \frac{5}{13}$

والزاويتين a,b تقعان في الربع الاول فاوجد

1) $\cos(a-b)$

2) $\sec(a-b)$

3) $\cos(a+b)$

4) $\sec(a+b)$

5) $\sin(a-b)$

6) $\operatorname{cosec}(a-b)$

7) $\sin(a+b)$

8) $\operatorname{cosec}(a+b)$

9) $\tan(a-b)$

10) $\cot(a-b)$

11) $\tan(a+b)$

12) $\cot(a+b)$

$cosa^2 + sina^2 = 1$

$cosa^2 + (\frac{3}{5})^2 = 1 \rightarrow sina^2 = 1 - (\frac{3}{5})^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

$cosa = \pm\frac{4}{5}$

وبما الزاوية تقع اما في الربع الاول

$cosa = \frac{4}{5}$

$cosb^2 + sinb^2 = 1$

$sinb^2 + (\frac{5}{13})^2 = 1 \rightarrow sinb^2 = 1 - (\frac{5}{13})^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$

$sinb = \pm\frac{12}{13}$

وبما الزاوية تقع اما في الربع الاول

$sinb = \frac{12}{13}$

$sina = \frac{3}{5} \quad cosa = \frac{4}{5} \qquad tana = \frac{sina}{cosa} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

$sinb = \frac{12}{13} \quad cosb = \frac{5}{13} \qquad tanb = \frac{sinb}{cosb} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$

1) $\cos(a-b) = cosacosb + sinasinb = \frac{4}{5}\times\frac{5}{13} + \frac{3}{5}\times\frac{12}{13} = 0.86$

2) $\sec(a-b) = \frac{1}{\cos(a-b)} = \frac{1}{0.86} = 1.16$

3) $\cos(a+b) = cosacosb - sinasinb = \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} - \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} = -0.2461538$

4) $\sec(a+b) = \frac{1}{\cos(a+b)} = \frac{1}{-0.2461538} = -4.0625$

5) $\sin(a-b) = sinacosb - cosasinb = \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} - \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} = -0.5076923$

6) $\text{cosec}(a-b) = \frac{1}{\sin(a-b)} = \frac{1}{-0.5076923} = -1.969697$

7) $\sin(a+b) = sinacosb + cosasinb == 0.969230$

8) $\text{cosec}(a+b) = \frac{1}{\sin(a+b)} = \frac{1}{0.969230} = 1.031746$

9) $\tan(a-b) = \frac{tana - tanb}{1 + tanatanb} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{12}{5}}{1 + (\frac{3}{4} \times \frac{12}{5})} = \frac{-1.65}{1+1.8} = \frac{-1.65}{2.8} = 0.5892857$

10) $\cot(a-b) = \frac{1}{\tan(a-b)} == \frac{1}{0.5892857} = 1.69696969$

11) $\tan(a+b) = \frac{tana + tanb}{1 - tanatanb} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{12}{5}}{1 - (\frac{3}{4} \times \frac{12}{5})} = \frac{3.15}{1-1.8} = \frac{3.15}{-0.8}$

$= -3.9375$

12) $\cot(a+b) = \frac{1}{\tan(a+b)} == \frac{1}{-3.9375} = -.253968254$

مثال

اذا كان

$\sin a = 1 \qquad \cos b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

والزاويتين a,b تقعان في الربع الاول فاوجد

1) $\cos(a-b)$ 2) $\sec(a-b)$

3) $\cos(a+b)$ 4) $\sec(a+b)$

5) $\sin(a-b)$ 6) $\text{cosec}(a-b)$

7) $\sin(a+b)$ 8) $\text{cosec}(a+b)$

9) $\tan(a-b)$ 10) $\cot(a-b)$

11) $\tan(a+b)$ 12) $\cot(a+b)$

$cosa^2 + sina^2 = 1$

$cosa^2 + (1)^2 = 1 \rightarrow sina^2 = 1 - (1)^2 = 1 - 1 = 0$

$cosa = 0$

$cosb^2 + sinb^2 = 1$

$sinb^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1 \rightarrow sinb^2 = 1 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$sinb = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

وبما الزاوية تقع اما في الربع الاول

$sinb = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$sina = 1 \quad cosa = 0 \; tana = \frac{sina}{cosa} = \frac{1}{0} =$ غير موجود

$sinb = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad cosb = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad tanb = \frac{sinb}{cosb} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$

1) $\cos(a-b) = cosacosb + sinasinb = 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071067$

2) $\sec(a-b) = \frac{1}{\cos(a-b)} = \frac{1}{0.7071067} = 1.41421356$

3) $\cos(a+b) = cosacosb - sinasinb = 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = -0.7071067$

4) $\sec(a+b) = \frac{1}{\cos(a+b)} = \frac{1}{-0.7071067} = -1.41421356$

5) $\sin(a-b) = sinacosb - cosasinb = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 - 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707106$

6) $\mathrm{cosec}(a-b) = \frac{1}{\sin(a-b)} = \frac{1}{0.707106} = 1.41421356$

7) $\sin(a+b) = sinacosb + cosasinb = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 - 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707106$

8) $\mathrm{cosec}(a+b) = \frac{1}{\sin(a+b)} = \frac{1}{0.707106} = 1.4142135$

$$9)\ \tan(a-b)=\frac{tana-tanb}{1+tanatanb}=\frac{\frac{1}{0}-1}{1+(\frac{3}{4}\times\frac{12}{5})}=$$ غيرموجود

$$10)\ \cot(a-b)=\frac{1}{\tan(a-b)}==$$ غير موجود

$$11)\ \tan(a+b)=\frac{tana+tanb}{1-tanatanb}=\frac{\frac{1}{0}+1}{1-(\frac{1}{0}\times1)}=$$ غيرموجود

مثال

بدون استخدام الالة الحاسبة اوجد قيمة ما يلي

$1) cos15$ $2) sin42cos12-cos42sin12$ $3) tan105$

$4) cos75$ $5) sin30cos15+cos30sin15$ $6) tan75$

$7)\ cosec15$

$$1) cos15=\cos(60-45)=cos60cos45+sin60sin45$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$2) sin42cos12-cos42sin12=\sin(42+12)=$$
$$\sin\ 30=0.5$$

$$3) tan105=\frac{tan60+tan45}{1-\ tan60tan45}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-(\sqrt{3}\times1)}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$

$$4) cos75=\cos(45+30)=cos30cos45-sin45sin30$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

5) $sin30cos15 + cos30sin15 = \sin(30 + 15) = sin45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

6) $tan75 = \frac{tan30+tan45}{1-tan30tan45} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-(\frac{1}{\sqrt{3}}+1)} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}})} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{3}}{1}$

$\operatorname{cosec}(15) = \frac{1}{\sin(15)} = \frac{1}{\sin(60-45)}$

$\sin(60 - 45) = sin60cos45 - cos60sin45 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\operatorname{cosec}(15) = \frac{1}{\sin(15)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$

مثال

بين ان

$\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\sin(\pi + x) = sin\pi cosx + cos\pi sinx = 0 \times cosx - 1 \times sinx = -sinx$

مثال

بين ان

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\cos(\pi - x) = cos\pi cosx + sin\pi sinx = -1 \times cosx + 0 \times sinx = -cosx$

مثال

بين ان

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(\pi + x) = sin\frac{\pi}{2}cosx - cos\frac{\pi}{2}sinx = 1 \times cosx + 0 \times sinx = cosx$

نظرية

1) $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

2) $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

3) $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

4) $\cos x - \cos y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

مثال

بدون استخدام الالة الحاسبة اوجد

sin105-sin15

$$\sin105 + \sin15 = 2\cos\left(\frac{105+15}{2}\right)\sin\left(\frac{105-15}{2}\right) =$$
$$2\cos\left(\frac{120}{2}\right)\sin\left(\frac{90}{2}\right) = 2\cos(60)\sin(45)2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

نظرية

1) $\cos2x = cosx^2 - sinx^2$

2) $\cos2x = 2cosx^2 - 1$

3) $\cos2x = 1 - 2sinx^2$

4) $\sin2x = 2sinxcosx$

5) $\tan2x = \frac{2tanx}{1-tanx^2}$

مثال

اذا علمت ان

$sinx = \frac{3}{5}$ $\qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

اوجد

1) $sin2x$ $\qquad$ 2) $cos2x$ $\qquad$ 3) $\tan2x$

$cosx = \frac{3}{5}$

$cosa^2 + sina^2 = 1$

$cosa^2 + (\frac{3}{5})^2 = 1 \rightarrow sina^2 = 1 - (\frac{3}{5})^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

$cosa = \pm\frac{4}{5}$

$cosa = \frac{4}{5}$

$1) sin2x = 2sinxcosx = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

$2) \cos 2x = 2cosx^2 - 1 = 2\frac{4}{5^2}^2 - 1 = \frac{-7}{25}$

$3) \tan 2x = \frac{2(\frac{3}{5}/\frac{4}{5})}{1-(\frac{3}{5}/\frac{4}{5})^2} = \frac{-24}{7}$

نموذج اختبار لتقييم الذاتي لمدى استيعاب المصطلحات والمفاهيم الرياضية التي تم ذكرها سابقا

السؤال الاول ضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة:

1- اذا كان $f(x) = 2^x$ فان $f(1)$ تساوي

2(a

1 (b

4 (c

d) لاشيء من ما ذكر

2- $log_4(64)$ تساوي

3 (a

2 (b

1 (c

4 (d

3- اذا كان $f(x) = \ln(x-2)$ فان مجال الاقتران هو

a) كل الاعداد بحيث ان x اكبر من 2

b) كل الاعداد بحيث ان x اصغر من 2

c) كل الاعداد بحيث ان x اكبر من 2-

d) كل الاعداد بحيث ان x اصغر من 2 -

4- اذا كان $log_3 2 \approx 0.6309$ فان $log_3 16$ يساوي

a) 2.5263

b) 2.5236

c) 2.2564

d) لا شئ من ما ذكر

5- $-log_{10}(1000)$ يساوي

a) -3

b) 3

c) 0.33333

d) -0.33333

6- ان مجموعة الأعداد { ... , 3 , 2 , 1 } هي مجموعة الاعداد

a) الطبيعية

b) الحقيقة

c) الصحيحة

d) النسبية

7- اذا كان $f(x) = 3x^2 - 6$ فان $f(2)$ تساوي

a) 6

b) -6

c) 0

d) 12

8- اذا كان $f(x) = x^2 - 3x^3 + 9$ فان مثل هذا الاقتران يسمى كثير حدود من الدرجة

a) الثالثة

b) الثانية

c) الاولى

d) الرابعة

9- اذا كان $f(x) = 4 + x$ و $g(x) = x - 4$ فان (f-g) يساوي

8 (a

-8 (b

2x (c

-2x (d

10- اذا كان $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$ فاي من الاعداد التالية يعتبر عامل للاقتران

3 (a

-3 (b

0.3333 (c

-0.3333 (d

ويسمى ب $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

11- يستخدم هذا القانون في ايجاد العوامل

a) فرق مكعبين

b) مجموع مكعبين

c) مضروب مكعبين

d) مقسوم مكعبين

12- يعتبر المميز من الطرق المستخدمة في الكشف عن عدد اصفار الاقتران التربيعي في حالة ان ناتج المميز يساوي صفر فان ذلك يشير الى وجود

a) صفر حقيقي واحد فقط

b) صفرين حقيقين

c) ثلاثة اصفار

d) لا يوجد اصفار حقيقية

13- اذا كان $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ فان اصفار الاقتران

a) -2

b) 2

c) 0.5

d) -0.5

14- باقي قسمة $\frac{x^3+6x^2+11x+6}{x+2}$ يساوي

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

15- باقي قسمة $f(x) = x^4 - 10x^2 + 2x + 3$ على $h(x) = x - 3$

هو

0 (a

1 (b

2 (c

3 (d

16- باقي قسمة $f(x) = x^3 - 2x + 1$ على $h(x) = x - 2$ باستخدام

القسمة التركيبية

25 (a

-25 (b

52 (c

-52 (d

17- اذا كان $f(x) = x^3 - 3x + 2$ فان (x-a) تعتبر من عوامل الاقتران

حيث a تساوي

1 (a

-1 (b

0.5 (c

-0.5 (d

18- الزاوية $\frac{\pi}{4}$ تكافئ بالدرجات الزاوية

45 (a

90 (b

60 (c

30 (d

19- الزاوية $\frac{2\pi}{3}$ تكافئ بالدرجات الزاوية

120 (a

130 (b

140 (c

180 (d

20- في المستوى الديكارتي الربع الاول يكون الجيب وجيب التمام

a) كلاهما موجبان

b) كلاهما سالب

c) الجيب يساوي جيب التمام

d) ليس من ما ذكر

21- قيمة الزاوية x بحيث ان $\sin x = -\cos x$ هي

135 (a

90 (b

120 (c

150 (d

22- قيمة الزاوية x بحيث ان $\sin x = \cos 2x = 0.5$ هي

30 (a

60 (b

90 (c

180 (d

23- قيمة sec 30 تساوي

2 (a

0.5 (b

-2 (c

-0.5 (d

24- قيمة cosec 90 تساوي

1 (a

0 (b

-1 (c

2 (d

25- قيمة cot 90 تساوي

0 (a

1 (b

c) غير معرفة

1 (d

السؤال الثاني: اذا كان

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

اوجد:

$f(0) - 1$

$f(2) - 2$

$f(4) - 3$

$f(6) - 4$

السؤال الثالث: اذا كان $log_3 2 \approx 0.6309$ اوجد

1) $log_3 16$

2) $log_3 27$

السؤال الرابع: اوجد

$log_{10}(100) - 1$

$log_{10}(0.1) - 2$

$log_4(16) - 3$

السؤال الخامس: عين الازواج المرتبة

$A(0,1)$, $B(-52)$, $C(-4,-3)$, $D(-5,0)$

السؤال السادس

اوجد مجال الاقترانات التالية:

$1 - f(x) = \sqrt{x^2 - 81}$

$2 - h(x) =$

$3 - Z(x) =$

$4 - h(x) =$

السؤال السابع:

1) باستخدام القسمة الطويلة اوجد ناتج وباقي قسمة

$f(x) = x^3 - 2x + 2$ على $h(x) = x - 3$

2) باستخدام القسمة التركيبة اوجد ناتج وباقي قسمة

$f(x) = x^4 + 2x - 3$ على $h(x) = x - 1$

السؤال الثامن: عين الازواج المرتبة

$A(0,0)$, $B(-2,2)$, $C(-4,-4)$, $D(-5,-5)$

السؤال التاسع:

ا) اكتب الحدود الثالثة الاولى لمتسلسلة التالية:

$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2r}{(1-4r)}$

ب) استخدم رمز المجموع ($\sum$) لتعبير عن المتسلسلات التالية:

1) 3+5+7+9+11+131)

جـ) اوجد الحد العام للمتاليات التالية لتعبير عن المتسلسلة التالية:

1) 1 , -1 , 1 ,-1

د) جد الحد العام للمتتالية الحسابية التالية

حدها الاول 4 واساسها 3

السؤال العاشر:

أ) ارسم منحنى الاقتران المعطى بالقاعده التالية:

$$g(x) = (\tfrac{1}{4})^x = 4^{-x}$$

ب) اوجد مجال الاقترانات التالي

$1)z(x) = \frac{1}{x^2-1}$

$2)h(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

السؤال الحادي عشر: اذا كان

$f(x) = 6 + x$

$g(x) = x - 6$

اوجد

$1)(f + g)(x)$ $2)(f - g)(x)$ $3)(f.g)(x)$

$4)\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ $5)(2f + 3g)(x)$

السؤال الثاني عشر:

أ) اوجد جذور المعادلة

$$x^2 + 3x + 2$$

ب) باستخدام نظرية العوامل اوجد جذور المعادلة

$$-x^3 - 6x^2 - 11x - 6 = 0$$

جـ)باستخدام طريقة فرق مكعبين اوجد جذور المعادلة

$$x^3 - 64$$

السؤال الثالث عشر:

ا) في اي ربع يقع ضلع الانتهاء لكل من الزوايا التالية:

-130 (1

630(2

ب)حول القياسات الاتية الى التقدير الدائري

2)125°   1)10°

السؤال الرابع عشر : اذا كان

$$sin\theta = \frac{1}{3}$$

اوجد, $sec\theta, cosec, cos\theta, tan\theta, cotan\theta$ علما بان الزاوية تقع في الربع الاول

السؤال الخامس عشر: اذا كان

$$\sin a = \frac{1}{7} \qquad \cos b = \frac{1}{3}$$

والزاويتين a,b تقعان في الربع الاول فاوجد

1) $\cos(a-b)$

2) $\sec(a-b)$

3) $\cos(a+b)$

4) $\sec(a+b)$

5) $\sin(a-b)$

6) $\mathrm{cosec}(a-b)$

7) $\sin(a+b)$

8) $\mathrm{cosec}(a+b)$

9) $\tan(a-b)$

10) $\cot(a-b)$

11) $\tan(a+b)$

12) $\cot(a+b)$

Refereces

1- الرياضيات لطلبة تكنولوجيا المعلومات والمكتبات والعلوم الهندسية.

المؤلف

1) محمد حسين رشيد 2) يزن إبراهيم مقبل

3) م. وائل طه الراموش

2- Salas, Calculus one several variables .

3- Elenco (1997) algebraai, McGraw- hill was terville, oh.

4- Gorg Knillan other (2000) Mathpower, Ontario Edaition McGraw hill.

الرياضيات للمرحلة الثانوية الفرع العلمي

5- Glencoe (1997) Algebra I McGraw- Hill, Wesleriville, OH.

الموقع الإلكتروني:

1- toutorial. Math- lamar-edu/classes/calcI

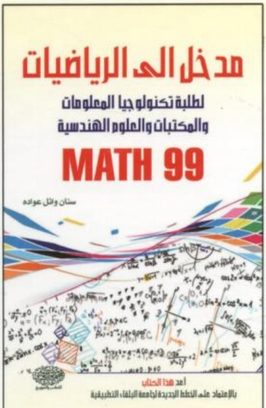
2- En. Eikipedia. Org/ wiki Exponanial – Function.

3- WWW. Themath page. Com/ aprecalc

مدخل الى الرياضيات

لطلبة تكنولوجيا المعلومات والمكتبات والعلوم الهندسية

MATH 99



9 789957 831523

مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع
الأردن-عمان -وسط البلد- ش السلط - مجمع الفحيص التجاري- تلفاكس: 2739 463 6 962+
خلوي5651920 79 962+ ص.ب 8244 الرمز البريدي 11121 جبل الحسين الشرقي
الأردن - عمان -الجامعة الأردنية -ش. الملكة رانيا العبدالله - مقابل كلية الزراعة - مجمع زهدي حصوة التجاري
www.muj-arabi-pub.com
E-mail:Moj_ pub@hotmail.com